

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-WIEN
K. GIRKMANN-WIEN · F. HOPFNER-WIEN · F. JUNG-WIEN
F. MAGYAR-WIEN · E. MELAN-WIEN · K. WOLF-WIEN

SCHRIFTFLEITUNG

F. MAGYAR-WIEN und K. WOLF-WIEN

BAND I, HEFT 3

(ABGESCHLOSSEN AM 31. OKTOBER 1946)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1946

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 20 — 25 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten. Für Lieferungen in das Ausland gelten Auslandspreise.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag),
Wien I, Mölkerbastei 5

zu senden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten für ihre Arbeit einen Unkostenersatz von S 50.— für den Druckbogen von 16 Seiten, im Höchstfall S 75.— für eine Arbeit. Sie erhalten ferner 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere 125 Exemplare, falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen (Beschriftung nur in Bleistift ausführen) oder in klaren verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Springer-Verlag, Wien I, Mölkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

Band I, Heft 3

Inhaltsverzeichnis

Preis S 30.—

Vorzugspreis für Mitglieder des Österr.
Ingenieur- und Architekten-Vereines S 27.—

Originalarbeiten.

	Seite
C. Torre, Zur Beulung versteifter Rechteckplatten bei veränderlicher Randbelastung.....	137
E. Feifel, Das staubeigene Fallgesetz im Wechsel der Betriebsbedingungen	149
R. Schön, Zusammensetzung von Belastungsströmen unruhiger Verbraucher, die Pendelungsleistung	157
A. Pröll, Der beschleunigte Aufstieg eines Strahlflugkörpers.....	175
V. Fritsch, Die geoelektrischen Verfahren der angewandten Geophysik	190
O. Plechl und A. Duschek, Grundzüge einer Algebra der elektrischen Schaltungen	203
F. Halla und L. Castelliz, Drehmoment einer homogen magnetisierten Kugel in einem Magnetfeld	230
J. Eckert, Die Einhüllende als Mittel zur Lösung technischer Probleme	234

Berichte.

F. Kracmar, Das Turbulenzproblem	238
--	-----

Buchbesprechungen	246
-------------------------	-----

Chmelka F. und Melan H., Einführung in die Festigkeitslehre für Studierende des Bauwesens. — Treadwell F.P.† und Meyer V.†, Treadwell W. D., Tabellen zur qualitativen Analyse. Siebzehnte Auflage.

Zur Beulung versteifter Rechteckplatten bei veränderlicher Randbelastung.

Von C. Torre, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

1. Einleitung.

Wir untersuchen eine rechteckige Platte, die in ihrer Mittelebene durch die linear veränderliche Randbelastung nach Abb. 1 beansprucht ist. Die Platte ist an allen Rändern frei drehbar gelagert und mit gleichen $(r-1)$ Längs- und $(v-1)$ Quersteifen in gleichen Abständen verstärkt. Es wird angenommen, daß die Schwerachse der Längs- und Quersteifen mit der Mittelebene der Platte zusammenfällt. Die Quersteifen kann man auch als einseitig ausgebildet annehmen. Eine theoretische Untersuchung solcher einseitig angeordneter Steifen stammt von Chwalla und Novak.¹ Dabei sind die Schubspannungen zwischen der Steife und Platte, die als Folge der „Außermittigkeit“ der Steifenanordnung entstehen, in der Berechnung berücksichtigt. Die durch Steifenkreuz verstärkte und gleichmäßig gedrückte Platte ist von Fröhlich² und die durch bestimmte Steifenroste verstärkte Platte von Knipp³ behandelt worden. Auf die Bedeutung der Zusammenwirkung des Steifenrostes hat schon Schleicher⁴ hingewiesen.

Der über alle Steifen gehende Summenausdruck, welcher bei solchen Berechnungen entsteht, lautet für den gleichmäßigen Druck und für die gleichen Längs- und Quersteifen in gleichen Abständen

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sin \frac{p \pi i}{r} \sin \frac{n \pi i}{r}, \quad (a)$$

dessen Lösung Fröhlich² und Knipp³ nicht in geschlossener Form angegeben haben. Die in Gl. (a) benutzten Abkürzungen sind in Abschnitt 2 zu finden. Bei unserer

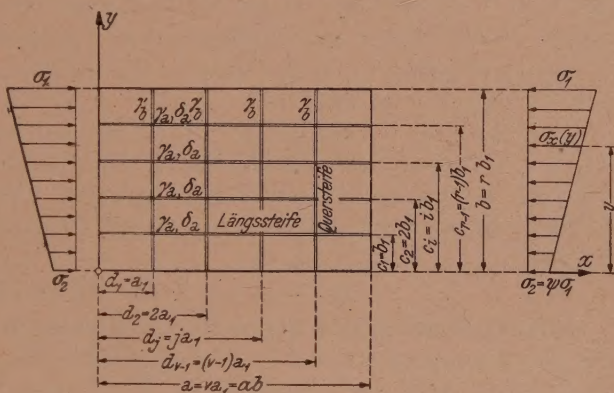


Abb. 1.

¹ E. Chwalla u. A. Novak: Stahlbau 10, 73 (1937).

² H. Fröhlich: Bauing. 18, 673 (1937).

³ G. Knipp: Bauing. 22, 257 (1941).

⁴ F. Schleicher: Bauing. 15, 505 (1934). Zweiter Kongreß der I. V. B. H., Vorbericht, S. 1391. Berlin 1936.

Verallgemeinerung über die veränderliche Randbelastung entsteht noch der Summenausdruck von der Form

$$\sum_{i=1}^{r-1} i \cdot \sin \frac{p \pi i}{r} \sin \frac{n \pi i}{r}. \quad (b)$$

Da wir die Lösungen der Gl. (a) und (b) in geschlossener Form angeben werden, gelingt uns deshalb die Verallgemeinerung sowohl im Falle beliebig vieler Längs- und Quersteifen als auch bei der linear veränderlichen Randbelastung der Platte.

Die Lösungen der Gl. (a) und (b) geben uns wieder die Möglichkeit, die Konvergenzfeststellungen über die Determinanten aufzustellen, d. h. den Begriff von vollkommener und unvollkommener Näherung einzuführen und die „Mindestzahl“ der Determinantenreihen als Funktion der Steifenzahl anzugeben.

Für den Fall, daß die Steife vollkommen starr ist, d. h. wenn eine Knotenlinie an Stelle der Steife erzwungen wird, hat Chwalla⁵ die Beulbedingung aufgestellt. Durch die Darstellung der Determinante nach dem Taylorschen Satz, wobei als Unbekannte die Steifigkeits- und Flächenverhältnisse (γ und δ) der Steifen angenommen werden, gelingt es uns, das Ergebnis von Chwalla⁵ zu verallgemeinern.

Es ist empfehlenswert, eine große Determinante nicht durch ein Polynom darzustellen, sondern probeweise ihre numerische Auswertung durchzuführen (z. B. den Beulwert k zu finden). Dabei bedient man sich des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Nach dieser Berechnungsart und mittels des Begriffes der vollkommenen Näherungen geben wir einige numerische Beispiele und vergleichen einige Beulwerte k mit der Arbeit von Stiffel.⁶

Das Material ist als isotrop und homogen vorausgesetzt. Die Berechnung wird mit der Energiemethode durchgeführt. Die Belastung der Quersteifen durch die Querdehnung der Platte wird außer acht gelassen, ebenso der Verdrehungswiderstand der Steifen. Es wird die unbeschränkte Gültigkeit des Hookeeschen Gesetzes vorausgesetzt.

2. Bezeichnungen.

Wir untersuchen eine dünne Rechteckplatte mit dem Seitenverhältnis $\alpha = a/b$ und der gleichmäßigen Dicke t (s. Abb. 1), deren Wölfläche bei drehbarer Lagerung an allen Seiten ($w = \Delta w = 0$) durch die Fouriersche Doppelreihe nach Timoschenko⁷

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} \quad (1)$$

dargestellt wird. Die Biegesteifigkeit der Platte ist durch $D = E t^3/12 (1 - \mu^2)$ gegeben, wobei $E = 2100 \text{ t/cm}^2$ der Elastizitätsmodul und $\mu = 0,3$ die Querdehnungszahl ist.

Der Beulwert ist durch $k = \sigma_k/\sigma_e$ angegeben, worin σ_k die Beulspannung und $\sigma_e = D \pi^2/b^2 t$ die Eulersche kritische Spannung eines Blechstreifens von der Knicklänge b und der Breite 1 darstellt.

Mit F_a ist der Querschnitt der Längssteifen und mit B_a bzw. B_b die Biegesteifigkeit der Längs- bzw. Quersteifen bezeichnet. Es bedeutet $B_a = E J_a$ bzw. $B_b = E J_b$, wobei J_a bzw. J_b das Trägheitsmoment der Längs- bzw. Quersteifen ist. Die Schwerachse von J_a bzw. J_b fällt mit der Mittelebene der Platte zusammen.

Das Querschnittsverhältnis zwischen der Längssteife und Platte wird mit $\delta_a = F_a/b t$, das Biegesteifigkeitsverhältnis zwischen der Längs- bzw. Quersteife und Platte mit $\gamma_a = B_a/b D$ bzw. $\gamma_b = B_b/b D$ bezeichnet. Nach Fröhlich² führen wir das Biegesteifigkeitsverhältnis der Quer- und Längssteifen $\varrho = \gamma_b/\gamma_a = J_b/J_a$ ein.

⁵ E. Chwalla: Stahlbau 9, 161 (1936).

⁶ R. Stiffel: Bauing. 22, 367 (1941).

Bedeutet r die Zahl der durch die Längssteifen gebildeten Zwischenfelder mit der Breite b_1 ($b = r b_1$), dann ist die Zahl der Längssteifen $(r - 1)$. Ähnlich ist in der Querrichtung die Zahl der Steifen mit $(v - 1)$ angegeben, falls v die Zahl der durch die Quersteifen gebildeten Zwischenfelder mit der Breite a_1 ($a = v a_1$) bedeutet.

Wird der Abstand der Steife i bzw. j von der x - bzw. y -Achse mit c_i bzw. d_j angegeben, dann gilt $\sin \frac{n \pi c_i}{b} = \sin \frac{n \pi i}{r}$ bzw. $\sin \frac{m \pi d_j}{a} = \sin \frac{m \pi j}{v}$.

Nach Fröhlich² führen wir die folgenden Bezeichnungen in etwas geänderter Form (mit $\psi = \sigma_2/\sigma_1$, und mit den Zahlen r und v) ein:

$$\Phi_{mn} = (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 - m^2 k \alpha^2 \cdot \frac{1 + \psi}{2},$$

$$\Psi_m = r (m^4 \gamma_a - m^2 k \alpha^2 \cdot \frac{1 + \psi}{2} \cdot \delta_a),$$

$$X_n = v n^4 \gamma_b \alpha^3.$$

Die Größe der linear veränderlichen Belastung an der Stelle y im Augenblick des Beulens beträgt

$$\sigma_{xk} = -k \sigma_e \left[\psi + (1 - \psi) \frac{y}{b} \right]. \quad (2a)$$

An der Stelle $y = c_i = i b_1$ einer Längssteife i ergibt sich aus Gl. (2a) die Spannung

$$\sigma_{xk} = -k \sigma_e \left[\psi + (1 - \psi) \frac{i}{r} \right]. \quad (2b)$$

Es wird nach Chwalla⁵ der Ausdruck $T = 16 k \alpha^2 / \pi^2$ eingeführt.

3. Die Beulbedingungen.

Im Augenblick des Beulens soll die Änderung der Arbeit der inneren Kräfte A_i gleich der bei der Verwölbung geleisteten zusätzlichen Arbeit der äußeren Kräfte A_a sein: $A = A_i + A_a = 0$. A_a ist hier mit dem positiven Zeichen angenommen, da schon die Spannung in Gl. (2) mit richtigem Vorzeichen versehen ist.

Die geleistete Formänderungsarbeit setzt sich aus Anteilen für die Platte (Index P) und Steifen (Längssteifen L , Quersteifen Q) zusammen

$$A = A_{iP} + \sum_{i=1}^{r-1} A_{iL} + \sum_{j=1}^{v-1} A_{jQ} + A_{aP} + \sum_{i=1}^{r-1} A_{aL} = 0.$$

Die Arbeitsausdrücke für die Platte und Steifen übernehmen wir nach Timoshenko.⁷ Die Arbeitsintegrale für die Platte lauten

$$A_{iP} = \frac{D}{2} \iint_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = \sigma_e \frac{\pi^2}{8} t \frac{b^3}{a^3} \cdot \sum_m \sum_n (m^2 + n^2 \alpha^2) A_{mn}^2. \quad (3a)$$

Der in Gl. (3a) vorkommende Ausdruck $w = w(x, y)$ ist aus Gl. (1) entnommen. Die in Gl. (3a) benutzten Abkürzungen sind in Abschnitt 2 zu finden.

$$\begin{aligned} A_{aP} &= \frac{t}{2} \iint_0^a \int_0^b \sigma_{xk} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy = -\frac{t}{2} k \sigma_e \iint_0^a \int_0^b \left[\psi + (1 - \psi) \frac{y}{b} \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy, \\ A_{aP} &= -k \sigma_e \frac{\pi^2}{8} t \frac{b^3}{a^3} \alpha^2 \cdot \frac{1 + \psi}{2} \sum_m \sum_n m^2 A_{mn}^2 + \\ &+ \sigma_e \frac{\pi^2}{4} t \frac{b^3}{a^3} T \cdot \frac{1 - \psi}{2} \sum_m \sum_n \sum_q m^2 A_{mn} A_{mq} \frac{n q}{(n^2 - q^2)^2}, \end{aligned} \quad (3b)$$

⁷ S. Timoshenko: Eisenbau 12, 147 (1921).

wobei $n - q = 1, 3, 5 \dots$ ist. $\sum'_n \sum'_q$ heißt, daß die gleichen Ausdrücke, die je zweimal vorkommen, schon in Betracht gezogen sind.

Die Arbeitsausdrücke für die Längssteifen werden an der Stelle der Steifen ($y = c_i$) integriert:

$$\sum_{i=1}^{r-1} A_{iL} = \frac{EJ_a}{2} \sum_{i=1}^{r-1} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=c_i}^2 dx = \gamma_a \sigma_e \frac{\pi^2}{4} t \frac{b^3}{a^3} \sum_m m^4 \left(\sum_n \sum_{i=1}^{r-1} A_{m n} \sin \frac{n \pi i}{r} \right)^2. \quad (3c)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{r-1} A_{aL} &= \frac{F_a}{2} \sum_{i=1}^{r-1} \sigma_x k \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y=c_i}^2 dx = -\frac{F_a}{2} k \sigma_e \sum_{i=1}^{r-1} \left[\psi + (1 - \psi) \frac{i}{r} \right] \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{y=c_i}^2 dx, \\ \sum_{i=1}^{r-1} A_{aL} &= -\sigma_e \frac{\pi^2}{4} t \frac{b^3}{a^3} \alpha^2 \delta_a k \sum_{i=1}^{r-1} \left[\psi + (1 - \psi) \frac{i}{r} \right] \sum_m m^2 \left(\sum_n A_{m n} \sin \frac{n \pi i}{r} \right)^2. \end{aligned} \quad (3d)$$

Der Arbeitsausdruck für die Quersteifen wird an der Stelle der Steife ($x = d_j$) integriert:

$$\sum_{j=1}^{v-1} A_{iQ} = \frac{EJ_b}{2} \sum_{j=1}^{v-1} \int_0^b \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=d_j}^2 dy = \gamma_b \cdot \frac{\pi^2}{4} \sigma_e t \sum_n n^4 \left(\sum_m \sum_{j=1}^{v-1} A_{m n} \sin \frac{m \pi j}{v} \right)^2. \quad (3e)$$

Die Gesamtarbeit lautet dann nach Gl. (3a) bis (3e)

$$\begin{aligned} A = 0 &= \sum_m \sum_n (m^2 + n^2 \alpha^2)^2 A_{m n}^2 - k \alpha^2 \cdot \frac{1 - \psi}{2} \sum_m \sum_n m^2 A_{m n}^2 + \\ &+ 2 T \cdot \frac{1 - \psi}{2} \sum_m \sum_n \sum'_q m^2 A_{m n} A_{m q} \cdot \frac{n q}{(n^2 - q^2)^2} + \\ &+ 2 \gamma_a \sum_m m^4 \left(\sum_n \sum_{i=1}^{r-1} A_{m n} \sin \frac{n \pi i}{r} \right)^2 - \\ &- 2 \delta_a k \alpha^2 \sum_{i=1}^{r-1} \left[\psi + (1 - \psi) \frac{i}{r} \right] \sum_m m^2 \left(\sum_n A_{m n} \sin \frac{n \pi i}{r} \right)^2 + \\ &+ 2 \gamma_b \alpha^3 \sum_n n^4 \left(\sum_m \sum_{j=1}^{v-1} A_{m n} \sin \frac{m \pi j}{v} \right)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Hier sind die Beiwerte $A_{m n}$ so zu bestimmen, daß der Ausdruck (4) ein Minimum wird, d. h. $\partial A / \partial A_{m n} = 0$. Dann erhält man ein System von linearen homogenen Gleichungen, welches lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial A_{m n}} = 0 &= \left[(m^2 + n^2 \alpha^2)^2 - k \alpha^2 m^2 \frac{1 + \psi}{2} \right] A_{m n} + T \frac{1 - \psi}{2} m^2 A_{m q} \frac{n q}{(n^2 - q^2)^2} + \\ &+ 2 (\gamma_a m^4 - k \alpha^2 \delta_a \psi m^2) \sum_{p=1}^{\infty} A_{m p} \sum_{i=1}^{r-1} \sin \frac{p \pi i}{r} \sin \frac{n \pi i}{r} - \\ &- \delta_a k \alpha^2 m^2 \frac{1 - \psi}{2} \cdot \frac{4}{r} \sum_{p=1}^{\infty} A_{m p} \sum_{i=1}^{r-1} i \cdot \sin \frac{p \pi i}{r} \sin \frac{n \pi i}{r} + \\ &+ 2 \gamma_b \alpha^3 n^4 \sum_{o=1}^{\infty} A_{o n} \sum_{j=1}^{v-1} \sin \frac{o \pi j}{v} \sin \frac{m \pi j}{v}. \end{aligned} \quad (5)$$

In Gl. (5) treten die schon erwähnten Gl. (a) und (b) auf:

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sin \frac{p \pi i}{r} \sin \frac{n \pi i}{r} \text{ bzw. } \sum_{j=1}^{v-1} \sin \frac{o \pi j}{v} \sin \frac{m \pi j}{v} \quad (\text{a})$$

und

$$\sum_{i=1}^{r-1} i \cdot \sin \frac{p \pi i}{r} \sin \frac{n \pi i}{r}. \quad (\text{b})$$

Die Lösungen der Gl. (a) für $p = n$ bzw. $o = m$ sind in der Literatur⁸ zu finden [vgl. Gl. (6a)]. Aus der Gestalt der schematisch gezeichneten Matrizen⁹ ergeben sich noch die Lösungen für $p \neq n$, und zwar $p = 2sr \mp n$ bzw. $o = 2sv \mp m$, $s = 1, 2, 3 \dots$. Die Lösungen lauten:

$$\sum_{i=1}^{r-1} \sin \frac{p \pi i}{r} \sin \frac{n \pi i}{r} = +\frac{r}{2}, \text{ wenn } p = n \text{ bzw. } \sum_{j=1}^{v-1} \sin \frac{o \pi j}{v} \sin \frac{m \pi j}{v} = +\frac{v}{2}, \text{ wenn } o = m^{10}$$

$$= \mp \frac{r}{2}, \text{ wenn } p = 2sr \mp n \quad = \mp \frac{v}{2}, \text{ wenn } o = 2sv \mp m. \quad (\text{6a})$$

($s = 1, 2, 3, \dots$)

Wir haben Gl. (b) mittels Differenzenrechnung gelöst (was nicht den einzigen Weg zur Lösung darstellt). Es läßt sich leicht beweisen, daß die Summe (als Umkehroperation der Differenzenrechnung)

$$\mathfrak{S} x \cdot \cos \alpha \left(x + \frac{1}{2} \right) \Delta x = \frac{x \cdot \sin \alpha x}{2 \sin \frac{\alpha}{2}} + \frac{\cos \alpha \left(x + \frac{1}{2} \right)}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (\text{c})$$

beträgt. [Aus $\Delta(x \cdot \sin \alpha x) = 2x \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha \left(x + \frac{1}{2} \right) + \sin \alpha (x + 1)$ folgt die Summenformel $x \cdot \sin \alpha x = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \mathfrak{S} x \cdot \cos \alpha \left(x + \frac{1}{2} \right) \Delta x + \mathfrak{S} \sin \alpha (x + 1) \Delta x$. Aus dieser Formel und mittels der ersten Gl. (9), S. 16 nach Bleich-Melan,⁸ ergibt sich Gl. (c).] Für $p = n$ lautet Gl. (b):

$$\sum_{i=1}^{r-1} i \cdot \sin^2 \frac{n \pi i}{r} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{r-1} i - \sum_{i=1}^{r-1} i \cdot \cos \frac{2n \pi i}{r} \right). \quad (\text{d})$$

Die erste Summe der Gl. (d) lautet:

$$\sum_{i=1}^{r-1} i = \mathfrak{S}_{i=1}^r i \cdot \Delta i = \frac{i}{2} (i - 1) \Big|_{i=1}^{i=r} = \frac{r}{2} (r - 1). \quad (\text{d}_1)$$

Die zweite Summe der Gl. (d) läßt sich mittels Gl. (c) auflösen. Wir nehmen an, daß $\alpha = 2n\pi/r$ und $i = x + 1/2$ ist, woraus $\Delta x = \Delta i$ folgt. Dann ergibt sich mit Beziehung auf die zweite Gl. (9), S. 16 von Bleich-Melan⁸

$$\sum_{i=1}^{r-1} i \cdot \cos \frac{2n \pi i}{r} = \mathfrak{S}_{i=1}^r i \cdot \cos \frac{2n \pi i}{r} \Delta i =$$

$$= \frac{i \cdot \sin \frac{2n \pi}{r} \left(i - \frac{1}{2} \right)}{2 \cdot \sin \frac{n \pi}{r}} + \frac{\cos \frac{2n \pi i}{r}}{4 \cdot \sin^2 \frac{n \pi}{r}} \Big|_{i=1}^{i=r} = -\frac{r}{2}. \quad (\text{d}_2)$$

⁸ S. z. B. Bleich-Melan: Die gew. und part. Differenzengleichungen der Baustatik, S. 17, Gl. (10'). Springer-Verlag 1927.

⁹ C. Torre: Stahlbau 17, 45 (1944).

¹⁰ Diese Lösung findet man bei S. Timoshenko: Theory of elastic stability, S. 379. New-York 1936.

Aus Gl. (d₁) und (d₂) ergibt sich die Lösung der Gl. (d) bzw. (b) für $p = n$ [vgl. Gl. (6 b)]. Gl. (b) besitzt noch die Lösungen für $p = 2sr \mp n$ ($s = 1, 2, 3 \dots$), was zur Gl. (d) zurückführt. Die weiteren Lösungen der Gl. (b) ergeben sich, falls man sie in der folgenden Form darstellt:

$$\sum_{i=1}^{r-1} i \cdot \sin \frac{p \pi i}{r} \sin \frac{n \pi i}{r} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{r-1} i \cdot \cos (p-n) \frac{\pi i}{r} - \sum_{i=1}^{r-1} i \cdot \cos (p+n) \frac{\pi i}{r} \right]. \quad (e)$$

Die Lösungen der Gl. (e) bekommt man mittels Gl. (c), wenn man statt α das Argument $\alpha = (p-n) \frac{\pi}{r}$ bzw. $\alpha = (p+n) \frac{\pi}{r}$ nimmt und $i = x + 1/2$, woraus $\Delta i = \Delta x$ folgt. Wir geben noch eine Zusammenstellung der Lösungsergebnisse der Gl. (b):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^{r-1} i \cdot \sin \frac{p \pi i}{r} \sin \frac{n \pi i}{r} &= + \frac{r^2}{4}, \text{ wenn } p = n \\ &= \mp \frac{r^2}{4}, \text{ wenn } p = 2sr \mp n \\ &\quad (s = 1, 2, 3, \dots) \\ &= 0, \text{ wenn } p \mp n = 2, 4, 6 \dots \\ &= - \frac{\sin \frac{p \pi}{r} \sin \frac{n \pi}{r}}{\left(\cos \frac{p \pi}{r} - \cos \frac{n \pi}{r} \right)^2}, \text{ wenn } p \mp n = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{nach Gl. (d)} \\ \\ \\ \text{nach Gl. (e)} \end{array} \quad (6b)$$

In dem letzten Ausdruck der Gl. (6b) kann man in der weiteren Berechnung statt p die Kennziffer q verwenden. Mittels Gl. (6a) und (6b) ergibt sich aus Gl. (5), wobei einfachheitshalber die Summenzeichen $\sum_{p=1}^{\infty}$ bzw. $\sum_{o=1}^{\infty}$ nicht mehr in die nachstehende Gleichung eingeführt sind,

$$\frac{\partial A}{\partial A_{mn}} = 0 = (\Phi_{mn} + \Psi_m + X_n) A_{mn} \mp \Psi_m A_{mp} \mp X_n A_{on} + \sum_{p=2sr \mp n, o=2sv \mp m, s=1,2,3 \dots} \Psi_m A_{mp} \mp X_n A_{on} + m^2 k \alpha^2 \cdot \frac{1-\psi}{2} \left[\frac{16}{\pi^2} \cdot \frac{nq}{(n^2 - q^2)^2} + \delta_a \cdot \frac{4}{r} \cdot \frac{\sin \frac{q \pi}{r} \sin \frac{n \pi}{r}}{\left(\cos \frac{q \pi}{r} - \cos \frac{n \pi}{r} \right)^2} \right] A_{mq}, \quad (7)$$

$n - q = 1, 3, 5 \dots$

Gl. (7) stellt ein System linearer Gleichungen dar. Eine Lösung außer $w = 0$ ergibt sich durch die Nullsetzung der Determinante des Systems: $\Delta = 0$. Die Entwicklung der Gl. (7) in linearen Gleichungen hängt von der Steifenzahl $(r-1)$ bzw. $(v-1)$ ab. Um einige Gesetze aus Gl. (7) übersichtlich ableiten zu können, untersuchen wir zuerst die Platte, die nur durch $(r-1)$ Längssteifen verstärkt ist.

A. Die nur durch Längssteifen verstärkte Platte.

4. Vollkommene und unvollkommene Näherungen.

Falls nur die Längssteifen vorhanden sind, wird in Gl. (7) der Ausdruck X_n zu Null. Wenn wir nun die Belastungsart $\psi = +1$ (reiner Druck) betrachten, folgt aus Gl. (7)

$$(\Phi_{mn} + \Psi_m) A_{mn} \mp \Psi_m A_{mp} = 0. \quad (7a)$$

Die Glieder $(\Phi_{mn} + \Psi_m)$ treten nur in der Hauptdiagonale der Determinante des Gleichungssystems auf, wobei für $n = r$ wird das Glied Ψ_m zu Null. Das Glied $\mp \Psi_m$

wiederholt sich nach der Regel $p = 2sr \mp n$, $s = 1, 2, 3 \dots$ (s. schematisch dargestellte Matrizen⁹). Die erste Zeile ($n = 1$) der Determinante ist dann mit

$$p = 2sr \mp 1, \quad s = 1, 2, 3 \dots \quad (8)$$

angegeben. Bei der Berechnung versteifter Rechteckplatten mittels Energiemethode wird die Zahl der Reihen (eine n -reihige Determinante oder Determinante n -ter Ordnung hat n^2 Elemente und entwickelt im Polynom ergibt sie die Summe von $n!$ Gliedern), die man in der Koeffizientendeterminante des Gleichungssystems berücksichtigen muß, einigermaßen von Bedeutung, wie sich weiterhin zeigen wird. Die richtige Reihenzahl dieser Determinante läßt sich mit der Gl. (8) berechnen. Wir nennen eine Näherung, deren Determinante des Gleichungssystems die Reihenzahl nach Gl. (8) besitzt, die vollkommene Näherung, da in dieser Determinante auch der Belastungsfall $\psi = +1$ (reiner Druck) vollkommen enthalten ist. Als unvollkommene Näherung bezeichnen wir jede andere Näherung, deren Determinante die Zahl von Reihen nicht nach Gl. (8) besitzt. Man empfindet besonders, daß diese Konvergenzfeststellungen zum Ausdruck kommen, wenn die Reihenzahl kleiner ist als $(2r - 1)$. Die Reihenzahl $(2r - 1)$ ergibt sich aus Gl. (8) für $s = 1$ und stellt die „Mindestzahl“ der Reihen dar, die man in der Berechnung berücksichtigen muß; die Reihenzahl $(2r - 1)$ oder $(2r - 1)$ -reihige Determinante bedeutet hiermit die „erste vollkommene Näherung“. Die weiteren Näherungen folgen, wenn man in Gl. (8) für jedes vorausgesetzte $s = 1, 2, 3 \dots$ zuerst das Zeichen „—“ und dann das Zeichen „+“ nimmt. Die Konvergenzfeststellungen, die sich aus Gl. (8) ergeben, gelten auch, wenn nur eine Steife, welche die Höhe der Platte in $2b/3, 3b/4 \dots (r - 1)b/r$ Teile teilt, vorhanden ist.

5. Die Knotenlinien am Orte der Steifen.

Aus Gl. (7) mit $X_n = 0$ kann man allgemein feststellen, daß — wenn $(r - 1)$ gleiche Steifen in gleichen Abständen vorhanden sind — sich die n -reihige Determinante $D(\gamma_a, \delta_a) = 0$ (mit $n > r$) des Gleichungssystems, in bezug auf die Steifenabmessungen γ_a und δ_a als Veränderliche, immer auf ein Polynom vom $(r - 1)$ -ten Grad zurückführen läßt. Nach dem Taylorschen Satz ergibt sich dann

$$D(\gamma_a, \delta_a) = \sum_{p=0}^{r-1} \frac{1}{p!} \left[\gamma_a \cdot \frac{\partial}{\partial \gamma_a} + \delta_a \cdot \frac{\partial}{\partial \delta_a} \right]^{(p)} \cdot D(0,0) = 0, \quad (9)$$

wobei die Ableitung der Ordnung Null die Funktion $D(0,0)$ (unversteifte Platte) selbst bedeutet und $0! = 1$ zu nehmen ist. Falls wir beispielsweise eine n -reihige Determinante durch ein Polynom nach Potenzen von k darstellen wollen, ergibt sich

$$D(k) = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} \cdot k^p \cdot \frac{d^p D(0)}{dk^p} = 0 \quad (9a)$$

ein Polynom vom n -ten Grad. Über die Ableitungen von Determinanten, die in Gl. (9) und (9a) vorkommen, ist Näheres in der Literatur¹¹ zu finden.

Aus Gl. (9) lassen sich die folgenden Folgerungen ziehen: Wir nehmen an, daß am Orte aller $(r - 1)$ Steifen die Knotenlinien erzwungen sind. Der mathematische Ausdruck dafür folgt aus Gl. (9) mit $\gamma_a = \infty$

$$\frac{\partial^{r-1} D(0,0)}{\partial \gamma_a^{r-1}} = 0. \quad (10)$$

Eine n -reihige Determinante reduziert sich dabei auf eine $(n - r + 1)$ -reihige Determinante.

¹¹ S. O. Peron: Algebra, 2. Aufl., Teil I. W. d. Gruyter & Co. 1932. G. Kowalewski: Einführung in die Determinantentheorie, 3. Aufl. W. d. Gruyter & Co. 1942.

Für den Fall $\psi = +1$ oder $\delta_a = 0$ oder wenn nur eine Steife, die auch außerhalb $b/2$ liegen kann, z. B. in $2b/3, 3b/4 \dots (r-1)b/r$, vorhanden ist, läßt sich Gl. (9) in folgender Form angeben:

$$D(\Psi_m) = D(0) + \frac{dD(0)}{d\Psi_m} \cdot \Psi_m = 0. \quad (11)$$

Falls das erste Glied der Gl. (11) zu Null wird [$D(0) = 0$], ergibt sich die Beulbedingung der unversteiften Platte ($\Psi_m = 0$). Das zweite Glied, gleich Null gesetzt

$$\frac{dD(0)}{d\Psi_m} = 0 \quad (11a)$$

ergibt die Beulbedingung für eine Knotenlinie, die an Stelle der Steife erzwungen wird ($\Psi_m = \infty$). Diese Beulbedingung hat Chwalla⁵ für eine auf Biegung beanspruchte Platte, die mit einer Steife in $b/4$ (in Druckzone) verstärkt ist, aus mechanischen Bedingungen aufgestellt. Gl. (10) stellt natürlich eine Verallgemeinerung der Gl. (11a) dar.

6. Anwendungen.

Die Ausführungen der Abschnitte 4 und 5 werden wir mittels einiger Beispiele weiter erklären.

Es wird hier nur ein einfacher Fall angenommen, nämlich der Fall einer Steife in der Plattenmitte ($r = 2$). Nach Gl. (8) folgt die erste vollkommene Näherung (Mindestzahl) mit der $2r - 1 = 3$ -reihigen Determinante; die zweite vollkommene Näherung beträgt: $2r + 1 = 5$ -reihige Determinante. Da uns das erste Glied der Gl. (11), das, Null gesetzt, der unversteiften Platte entspricht, hier weniger interessiert, wollen wir das zweite Glied untersuchen, nämlich Gl. (11a). Deshalb haben wir die vorliegende Determinante Gl. (12) so umgeformt, daß der Ausdruck Ψ_m nur in einem Element der gesamten Determinante vorkommt. [Wir haben zuerst die Spalte (Zeile) 3 zu 5 und dann die Spalte (Zeile) 1 zu 3 addiert.] Aus Gl. (7) für $X_n = 0$ folgt:

A_{m1}	A_{m2}	A_{m3}	A_{m4}	A_{m5}
$\Phi_{m1} + \Psi_m$	$\frac{1-\psi}{2} T \frac{2}{9}$	Φ_{m1}	$\frac{1-\psi}{2} T \frac{4}{225}$	—
$\frac{1-\psi}{2} T \frac{2}{9}$	Φ_{m2}	$\frac{1-\psi}{2} T \left(\frac{6}{25} + \frac{2}{9} \right)$	—	$\frac{1-\psi}{2} T \left(\frac{10}{441} + \frac{6}{25} \right)$
Φ_{m1}	$\frac{1-\psi}{2} T \left(\frac{6}{25} + \frac{2}{9} \right)$	$\Phi_{m1} + \Phi_{m3}$	$\frac{1-\psi}{2} T \left(\frac{4}{225} + \frac{12}{49} \right)$	Φ_{m3}
$\frac{1-\psi}{2} T \frac{4}{225}$	—	$\frac{1-\psi}{2} T \left(\frac{4}{225} + \frac{12}{49} \right)$	Φ_{m4}	$\frac{1-\psi}{2} T \left(\frac{20}{81} + \frac{12}{49} \right)$
—	$\frac{1-\psi}{2} T \left(\frac{10}{441} + \frac{6}{25} \right)$	Φ_{m3}	$\frac{1-\psi}{2} T \left(\frac{20}{81} + \frac{12}{49} \right)$	$\Phi_{m3} + \Phi_{m5}$

(12)

Aus Gl. (12) und (11a) folgt die Beulbedingung für den Fall, daß eine Knotenlinie am Ort der Steife erzwungen wird ($\Psi_m = \infty$, nur mit $n = 3$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dD(\Psi_m)}{d\Psi_m} \right)_{\Psi_m=\infty} &= \frac{dD(0)}{d\Psi_m} = 0 = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & - & - \\ \frac{1-\psi}{2} T \frac{2}{9} & \Phi_{m2} & \frac{1-\psi}{2} T \left(\frac{6}{25} + \frac{2}{9} \right) \\ \Phi_{m1} & \frac{1-\psi}{2} T \left(\frac{6}{25} + \frac{2}{9} \right) & \Phi_{m1} + \Phi_{m3} \end{vmatrix} = \\ &= \Phi_{m2} (\Phi_{m1} + \Phi_{m3}) - \left(\frac{1-\psi}{2} \right)^2 T^2 \left(\frac{6}{25} + \frac{2}{9} \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Aus Beulbedingung von Chwalla⁵ bekommt man dieselbe Gl. (13), wenn man annimmt, daß die Durchbiegung der Platte an Stelle der Steife ($y/b = i/r$) Null sein soll. Der Verfasser hat sich auch durch die anderen Beispiele überzeugt, daß Gl. (10) bzw. Gl. (11a) die erwarteten Beulwerte k für die Knotenlinie an Stelle der Steife liefern und die Übereinstimmung für eine auf Biegung beanspruchte und in $b/4$ (in Druckzone) versteifte Platte mit den Arbeiten von Chwalla⁵ und Stiffel⁶ nachgewiesen.

Wir betrachten weiter die gleiche Platte ($r = 2$), die aber mit einer bestimmten Belastung, nämlich dem Spannungsdreieck $\psi = 0$ belastet ist. Dieser Fall ist in Abb. 2 angegeben. In Abb. 3 ist die Kurve

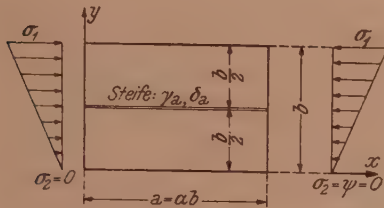


Abb. 2.

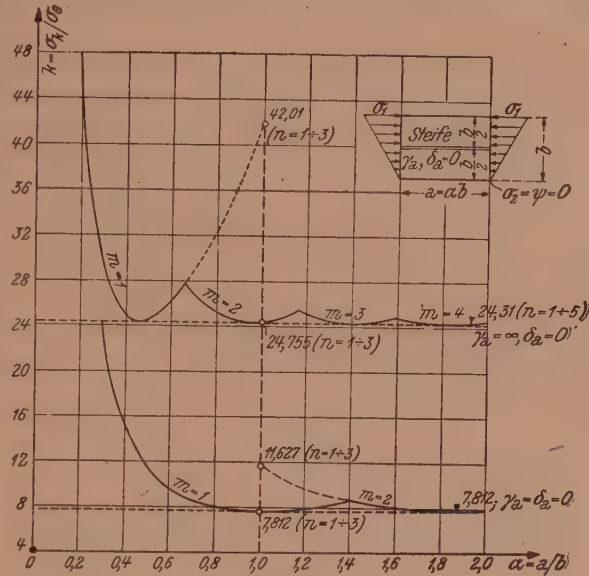


Abb. 3.

für die unversteifte Platte ($\gamma_a = \delta_a = 0$) gemäß den Zahlenwerten von Shizuo Ban¹² und Timoshenko⁷ gezeichnet. Die Kurve für $\gamma_a = \infty$, $\delta_a = 0$ ist nach Gl. (13) gerechnet (für $\psi = 0$); die nachstehende Zahlentafel 1 gibt einige Werte k in Abhängigkeit von der sog. „Beullänge“ $\lambda = \alpha/m$ an:

Zahlentafel 1 ($\gamma_a = \infty$).

λ	k	λ	k	λ	k
0,20	45,82	0,46	24,59	0,80	32,64
0,25	34,79	0,50	24,76	0,90	36,99
0,30	29,27	0,60	26,32	1,00	42,02
0,40	25,05	0,70	29,04	1,10	47,66
0,45	24,60				

Der kleinste Beulwert k tritt für $\lambda = 0,46$ mit dem Betrag $k = 24,59$ auf. Dieser Beulwert wird nach Gl. (12) mit der Gliederzahl $n = 1 \div 5$ schärfer gerechnet. Mit dem ausgewählten Beulwert $k = 24,32$ ($\lambda = 0,46$, $\psi = 0$) erhält man aus Gl. (12):

$$\frac{dD(0)}{d\psi_m} = D'(0) = \begin{vmatrix} 0,8361 & 1,9281 & - & 1,0957 \\ 1,9281 & 4,7574 & 1,0957 & 5,8625 \\ - & 1,0957 & 16,6604 & 2,0515 \\ 1,0957 & 5,8625 & 2,0515 & 42,8535 \end{vmatrix} \quad (14)$$

Nach dem Laplaceschen Entwicklungssatz läßt sich Gl. (14) schnell ausrechnen. Dabei wählen wir als Unterdeterminante die zweireihige Determinante aus. Demnach ergibt sich nach Gl. (14)

$$D'(0) = + (-1)^6 (0,8351 \cdot 4,7574 - 1,9281^2) (16,6604 \cdot 42,8535 - 2,0515^2) + \\ + \dots + (-1)^{10} (-1,0957)^4, \\ D'(0) = - 5,650.$$

¹² Shizuo Ban: Abhandlungen der I. V. B. H. III, S. 1. 1935.

Wenn wir $k = 24,30$ nehmen ($\lambda = 0,46$, $\psi = 0$), ergibt sich

$$D'(0) = + 6,581.$$

Durch solche schrittweise Annäherung erhält man die Lösung der Näherung $n = 1 \div 5$ (die zweite vollkommene Näherung), $k = \text{rd. } 24,31$, was einem Beulwert für die unendlich lange Platte entspricht (s. Abb. 3).

Mit Gl. (11) und nur drei Reihen ($n = 3$) der Gl. (12) und für $\psi = 0$ bekommt man

$$\Psi_m = 2 \left(\gamma_a - \delta_a \frac{k \lambda^2}{2} \right) = - \frac{\Phi_{m1}}{\frac{T}{2} \cdot \frac{2}{9}} = - \frac{\Phi_{m2}}{\frac{T}{2} \cdot \frac{6}{25}} : \frac{\Phi_{m2}}{\frac{T}{2} \left(\frac{6}{25} + \frac{2}{9} \right)} = \frac{\Phi_{m1} + \Phi_{m3}}{\Phi_{m2}} \quad (15)$$

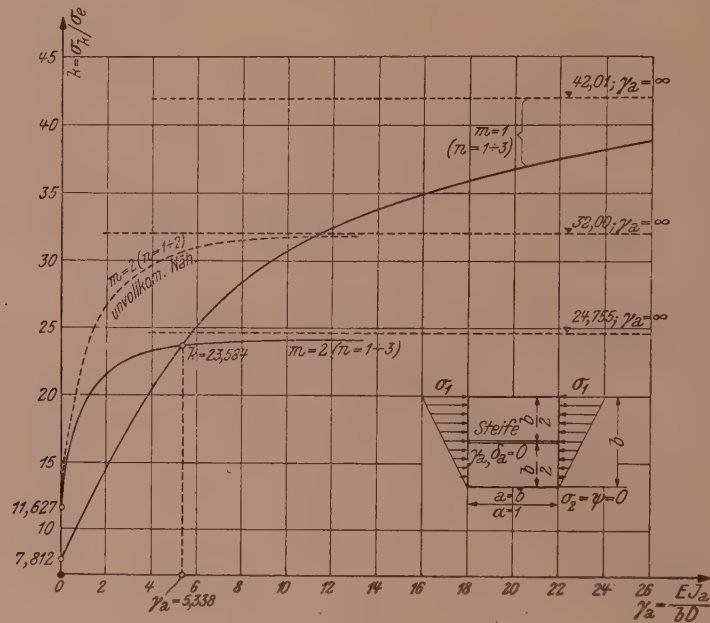


Abb. 4.

Wir setzen unsere Untersuchung mit einer quadratischen Platte ($\alpha = 1$) fort. Nach Gl. (15) bekommt man für $\delta_a = 0$, $\lambda = 1/2$ ($\alpha = 1$, $m = 2$), $n = 1 \div 3$ die entsprechende Kurve in Abb. 4. Einige Zahlenwerte geben wir in Zahlentafel 2.

Zahlentafel 2.

$k = 11,627$	16,00	20,00	22,00	23,00	24,00	24,755
$\gamma_a = 0$	0,417	1,184	2,219	3,547	8,281	∞

Die Kurve für die unvollkommene Näherung ist in Abb. 4 strichliert gezeichnet ($n = 1 \div 2$). Dabei ist $\lambda = 1/2$ angenommen. Die Determinante dieser Näherung hat die Reihenzahl kleiner, als Gl. (8) für die „Mindestzahl“ (hier $p = 2r - 1 = 3$) fordert. Wie ersichtlich ist, weicht sie von der Näherung $n = 1 \div 3$ ($\lambda = 1/2$) beträchtlich ab.

In der Zahlentafel 3 sind einige Werte angegeben, die für $\lambda = 1$ ($\alpha = 1$, $m = 1$) aus Gl. (15) berechnet und in Abb. 4 eingetragen sind.

Zahlentafel 3.

$k = 7,812$	10,00	16,00	20,00	24,00	30,00	36,00	40,00	42,01
$\gamma_a = 0$	0,591	2,391	3,816	5,558	9,335	18,358	63,552	∞

Die Beulwerte k für $\alpha = 1$, die für Extremwerte von $\gamma_a = 0$ und $\gamma_a = \infty$ vorkommen, sind in Abb. 3 eingetragen. Aus Abb. 4 ist ersichtlich, daß für $\gamma_a = 5,338$ (entsprechend $k = 23,584$) der Fall eintritt, wo sich die Platte nach einer oder zwei Halbwellen ausbeulen kann. Darüber hat Chwalla¹³ berichtet, wobei er eine kurze vergleichende Behandlung über den federnd gestützten Stab und die versteifte Platte angibt.

Aus Abb. 4 sieht man, daß eine Längssteife mit unendlich großem Trägheitsmoment ($J_a = \infty$) notwendig ist um eine Knotenlinie am Ort der Steife erzwingen zu können, während z. B. bei reiner Druckbelastung auch ein endlich großes Trägheitsmoment J_a der Steife genügt, damit sich die Steife biegestarr verhält. Diese Untersuchungen über die „Mindeststeifigkeiten“ haben Kromm¹⁴ und Chwalla¹⁵ durchgeführt. Gl. (4) von Chwalla¹⁵ stellt ein Polynom dar, das in Übereinstimmung mit unserer Gl. (9a) steht. Die Koeffizienten c_0 bis c_6 entsprechen den Ableitungen nach dem Beulwerte k der Systemdeterminante $D(k) = 0$. So ergibt sich z. B. $c_0 = D(0)$, $c_1 = dD(0)/dk$ usw. Die Koeffizienten $c_0 = D(0)$ und $c_6 = d^6D(0)/dk^6$ bestehen aus je einer Determinante, während z. B. der Koeffizient $c_2 = d^2D(0)/dk^2$ aus $\binom{n}{p} = \binom{6}{2} = 15$ Determinanten besteht.

Auf Grund der Arbeiten von Chwalla^{5,16} haben Stiffel⁶ und Massonnet¹⁷ denselben Belastungsfall $\psi = -1$ (reine Biegung) für die verschiedenen Lagen und Zahl der Steifen untersucht. Denselben Belastungsfall mit einer Steife in der Plattenmitte hat auch Hampl¹⁸ behandelt.

Für den Fall einer Steife in $y = 3b/4$ ist aus der Arbeit von Stiffel⁶ ersichtlich, wie sich die unvollkommenen Näherungen, deren Reihenzahl der Determinante nicht die „Mindestzahl“ ($2r - 1$) nach Gl. (8) erreicht hat, verhalten. Aus der Bedingung, daß unsere Konvergenzfeststellungen auch gelten, wenn nur eine Steife an der Stelle $y = (r - 1)b/r =$ (hier) $3b/4$ vorhanden ist, bekommt man $r = 4$. Damit ergibt sich die „Mindestzahl“ ($2r - 1$) = 7. Stiffel⁶ hat den kleinsten Beulwert k für die Knotenlinie an Stelle der Steife mittels der Extrapolation erreicht.

Im Falle einer Steife in der Plattenmitte ($r = 2$) bekommt man nach Gl. (12) für $\psi = -1$ (reine Biegung), $\lambda = 1/2$ und für $\gamma_a = \infty$ [bzw. nach Gl. (11a)] den Beulwert $k = 36,02$; bei Stiffel⁶ in Abb. 8 (S. 373) beträgt der Beulwert $k = 36,30$, was einen kleinen Unterschied bedeutet. Für $\lambda = 0,432$ tritt in diesem Falle der kleinste Beulwert $k = 35,34$ auf, während bei Stiffel⁶ $k = 35,5$ beträgt.

B. Die durch Längs- und Quersteifen verstärkte Platte.

Wir beschränken hier unsere Untersuchung nur auf diejenigen Beziehungen, die die Verallgemeinerung einiger Gleichungen von Fröhlich² und Knipp³ darstellen.

7. Über die vollkommenen Näherungen.

Die Elemente $\mp X_n$ [s. Gl. (7)] einer Determinante für die nur mit Quersteifen verstärkte Platte wiederholen sich nach dem Gesetz: $o = 2sv \mp m$, $s = 1, 2, 3 \dots$ [s. Gl. (6a)]. Die vollkommenen Näherungen sind nach der Gleichung

$$o = 2sv \mp 1, \quad (s = 1, 2, 3 \dots) \quad (8a)$$

¹³ E. Chwalla: Stahlbau 13, 68 (1940).

¹⁴ A. Kromm: Stahlbau 17, 81 (1944).

¹⁵ E. Chwalla: Stahlbau 17, 84 (1944).

¹⁶ E. Chwalla: Zweiter Kongreß der I. V. B. H., Vorbericht, S. 957. Berlin 1936.

¹⁷ Ch. Massonnet: Abhandlungen der I. V. B. H., VI, S. 233. 1940/41.

¹⁸ M. Hampl: Stahlbau 10, 16 (1937).

zu bestimmen. Falls Längs- und Quersteifen vorhanden sind, ist die Reihenzahl (die Ordnung) der Determinante der vollkommenen Näherungen aus dem Produkt

$$(2sr \mp 1)(2sv \mp 1), \quad (s = 1, 2, 3 \dots) \quad (8b)$$

zu bestimmen. Man bekommt aus Gl. (8b), wenn z. B. zwei Längssteifen ($r = 3$) und vier Quersteifen ($v = 5$) vorhanden sind, die vollkommenen Näherungen mit der

- I. vollkommenen Näherung $s = 1 \dots (2r - 1)(2v - 1) = 45$ (Mindestzahl)
 II. „ „ „ $s = 1 \dots (2r + 1)(2v + 1) = 77$
 III. „ „ „ $s = 2 \dots (4r - 1)(4v - 1) = 209 \dots$ usw. -reihigen

Determinante. Eine solche Determinante zerfällt in mehrere Unterdeterminanten. Eine Vereinfachung der Unterdeterminante läßt sich noch im Falle $\psi = +1$ (reiner Druck) durchführen, da dann das letzte Glied der Gl. (7) verschwindet.

Die in der Literatur genannte „erste“ Näherung ergibt sich, wenn man in Gl. (7) nur das erste Glied berücksichtigt ($n = 1, m = 1$), zu

$$k = \frac{(1 + \alpha^2)^2 + \gamma_a(r + \varrho v \alpha^3)}{\alpha^2(1 + r\delta_a)} \cdot \frac{2}{1 + \psi}. \quad (16)$$

Gl. (16) weist für $\psi < 0$ unzulässige Abweichungen auf. Für $r = v = 2$ und $\psi = +1$ stimmt Gl. (16) mit Gl. (11a), S. 675 von Fröhlich² überein.

Die Determinante der ersten vollkommenen Näherung für den Belastungsfall $\psi = +1$ (reiner Druck) gibt Knipp³ auf S. 267 für beliebig viele Längs- und Quersteifen an. Unsere untenstehende Wiedergabe dieser Determinante unterscheidet sich von Knipp³ dadurch, daß wir die Zahlen m, n, p und q in Abhängigkeit von den Steifenzahlen r und v angeben werden. In bezug auf Gl. (8b) mit $s = 1$ folgt:

Belastungsfall $\psi = +1$; r und v beliebig groß.

A_{11}	$A_{1,2r-1}$	$A_{2v-1,1}$	$A_{2v-1,2r-1}$
$\Phi_{11} + \Psi_1 + X_1$	$-\Psi_1$	$-X_1$	$-$
$-\Psi_1$	$\Phi_{1,2r-1} + \Psi_1 + X_{2r-1}$	$-$	$-X_{2r-1}$
$-X_1$	$-$	$\Phi_{2v-1,1} + \Psi_{2v-1} + X_1$	$-\Psi_{2v-1}$
$-$	$-X_{2r-1}$	$-\Psi_{2v-1}$	$\Phi_{2v-1,2r-1} + \Psi_{2v-1} + X_{2r-1}$

(17)

Allgemein kann man feststellen, daß die Determinante der n -ten vollkommenen Näherung gemäß der Anzahl der Variationen mit Wiederholung zur 2. Klasse mit den $(n+1)^2$ -Reihen entspricht (vgl. Fröhlich^{2a} S. 677). Z. B. lauten die Kennziffern der A_{mn} -Koeffizienten der zweiten vollkommenen Näherung (d. h. für $m = 1, 2v - 1, 2v + 1$ und $n = 1, 2r - 1, 2r + 1$):

$$\begin{array}{ccc} A_{1,1}, & A_{2v-1,1}, & A_{2v+1,1}, \\ A_{1,2r-1}, & A_{2v-1,2r-1}, & A_{2v+1,2r-1}, \\ A_{1,2r+1}, & A_{2v-1,2r+1}, & A_{2v+1,2r+1}. \end{array}$$

Es ist hier notwendig, nach Knipp³ die Grenzen für die Gültigkeit der „Grundlösung“ (in der die Wirkung aller Steifen zum Ausdruck kommt) zu untersuchen.

(Eingegangen am 26. November 1945.)

Das staubeigene Fallgesetz im Wechsel der Betriebsbedingungen.

Von E. Feifel, Wien.

Mit 2 Textabbildungen.

Einleitung.

Die durch Siebung und Windsichtung gewonnenen Kennlinien eines in seiner natürlichen Zusammensetzung nicht gestörten Staubes können für viele Aufgaben der Staubtechnik mit hinreichender Sicherheit durch Exponentialgleichungen beschrieben werden, die dem Gaußschen Verteilungsgesetz nachgebildet sind. Auf dieser Grundlage gelingt es, die Annahme kugelförmiger Staubeilchen aus dem rechnerischen Übergang von der Körnungslinie zur Fälligkeitslinie, d. h. aus dem Fallgesetz auszuschalten und das übliche Kugelfallgesetz durch ein staubeigenes¹ Fallgesetz zu ersetzen. Letzteres wird im folgenden zunächst dem Stokesschen Kugelfallgesetz gegenübergestellt und sodann Betriebsbedingungen angepaßt, die — wie z. B. jene einer Entstaubungsanlage — von den Versuchsbedingungen der Windsichtung abweichen.

1. Das Verhältnis der Bremsbeiwerte des staubeigenen und Stokesschen Fallgesetzes.

Unter Bezugnahme auf einen bestimmten Staub kann die Frage gestellt werden: Welcher Zusammenhang zwischen Teilchengröße a und Fallgeschwindigkeit w muß an die Stelle eines Kugelfallgesetzes treten, damit die Meßkurve 1 [Abb. 1] eine stetige Verlängerung nach (1), die Meßkurve 2 eine solche nach (2) findet? Das Ergebnis ist das staubeigene Fallgesetz.²

Die Frage kann aber auch umgekehrt lauten: Welche Zusammensetzung — ausgedrückt durch die Exponenten seiner Kenngleichungen — muß ein Staub aufweisen, damit die zugehörigen Meßkurven 1 und 2 samt ihren stetigen wahrscheinlichen Verlängerungen über die Meßgrenzen hinaus durch ein Kugelfallgesetz verbunden sind? Es soll mit anderen Worten die Eigenschaft der Punkte B_1 und B_2 [Abb. 2] bzw. A_1 und A_2 [Abb. 3], wonach $\psi_{\alpha \text{ spezial}} = \psi_{\alpha \text{ Stokes}}$ ist, auf die ganzen Kennlinien übertragen werden.

Wenn die Frage dabei näherhin dem in w linearen Stokesschen Gesetz gilt, so ist hierfür neben seiner Einfachheit der Umstand maßgebend, daß es im Bereich der für Entstaubungsanlagen praktisch wichtigen Rückstände R zuständig ist, sofern die Kugelgestalt der Teilchen überhaupt Voraussetzung bleibt.

Jede Vereinigung von Versuchsbedingungen, die bei der Aufnahme und Verwertung eines Kennlinienpaares gemäß [Abb. 1] zu den Werten

$$n = 1, \quad A = 36$$

führt, liefert für den betreffenden Staub das Fallgesetz der [Gl. (9)]

$$\text{oder} \quad \frac{36}{R_e} w^2 - 2 g \frac{\gamma_s}{\gamma_l} a = 0$$

$$\frac{36}{a} w - 2 g \frac{\gamma_s}{\gamma_l} a = 0,$$

¹ Vgl. hierzu: E. Feifel, „Ein staubeigenes Fallgesetz“, Bd. I, H. 1/2, S. 92. Die in Kursivschrift innerhalb eckiger Klammern, z. B. [Abb. 1], zitierten Gleichungs- und Abbildungsnummern verweisen auf die eben angeführte einführende Behandlung des vorliegenden Themas, aus der auch die Bezeichnungen und die Zahlenwerte des Beispiels übernommen sind.

² Dieses aus den Ergebnissen der Siebung und der Windsichtung abgeleitete „staubeigene“ Fallgesetz eines bestimmten Staubes wird zum „betriebseigenen“ Fallgesetz, wenn der gleiche Staub aus den Bedingungen der Windsichtung unter jene eines bestimmten Betriebsfalles tritt.

ohne daß ihm — wie bei der theoretischen Ableitung dieser Gleichung — die Stokes'sche Annahme kugelförmiger Teilchen zugrunde liegen müßte. Es genügt vielmehr der Zusammenhang, der sich ergibt aus [s. Gl. (26)]

$$1 = \frac{2 y_1 - y_2}{y_1 + y_2}, \quad \text{d. h.} \quad y_1 = 2 y_2, \quad (1)$$

$$36 = 2 g \cdot 10^{-4(1+1)} \frac{\gamma_s}{\gamma_l} \nu^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{\frac{3}{2 y_2 + y_2}},$$

d. h. $\left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{\frac{1}{y_2}} = 10^8 \cdot 18 \frac{\nu}{g} \frac{\gamma_l}{\gamma_s} = \mathfrak{F}_{\text{Stokes}}^2 \quad \text{oder} \quad \frac{x_2}{x_1} = \mathfrak{F}_{\text{Stokes}}^{y_1} \quad (2)$

[Abb. 9] enthält neben der Fallgeschwindigkeit nach [Gl. (27)] noch die Geschwindigkeiten der drei Kugelfallgesetze. Der dort betrachtete Braunkohlenstaub zeigt hiernach in den Fraktionen unterhalb des Schnittpunktes S eine größere, in den oberen Fraktionen eine kleinere Fallgeschwindigkeit, als die Annahme kugelförmiger Teilchen erwarten läßt.

In [Abb. 9] ist ferner gemäß [Gl. (13) und (30)]

$$w \geq w_{\text{Stokes}}$$

für $\left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\frac{1}{y_2}} \cdot a^{\frac{y_1}{y_2}} \geq \frac{a^2}{\mathfrak{F}_{\text{Stokes}}^2}, \quad (3)$

$$\text{d. h. für} \quad a \leq \left[\frac{x_1}{x_2} \cdot \mathfrak{F}_{\text{Stokes}}^{2 y_2} \right]^{\frac{1}{2 y_2 - y_1}}, \quad (4)$$

$$\leq 54,2 \mu^3$$

In ähnlicher Weise ergeben sich die Schnittpunkte S der staubeigenen Kurven mit den Stokesschen Werten

- in [Abb. 6] bei $a = 54,2 \mu$,
- in [Abb. 7] bei $R = 16\%$,
- in [Abb. 8] bei $R_e = 4,57 \cdot 10^{-1}$.

Die Punkte B_1 und B_2 in [Abb. 2], bzw. die zugehörigen Fraktionsmerkmale a_B und w_B sind durch ein Kugelfallgesetz mit dem kollektiven Mittelwert $\psi_{\alpha \text{ spez.}} = \psi_{\alpha \text{ Kugel}}$ verbunden, gleichgültig, ob die Kugel als Korngestalt in der Fraktion allein, vorherrschend oder überhaupt vertreten ist. Entsprechend der eingangs gestellten Frage ist diese Unabhängigkeit von einer bestimmten Korngestalt durch vorstehende Zusammenhänge auf die ganze Kennlinie ausgedehnt.

Zweifelloos weisen auch andere Körper als die Kugel einen Formbeiwert $\alpha = 2/3$ auf. Ob einem nicht kugelförmigen Einzelkorn ein Widerstandsbeiwert $\psi = 24/R_e$ oder ein Bremsbeiwert $\psi_{\alpha} = 36/R_e$ zukommen kann, darf dahingestellt bleiben; denn eine Staubbildung aus lauter geometrisch ähnlichen solchen Teilchen wäre noch um einen Grad unwahrscheinlicher als aus kugelförmigen Teilchen. Entgegen der indifferenten Lage der letzteren in der Strömung müßte ihrem für die Abmessung a maßgebenden Querschnitt F die Eigenschaft des Hauptspantes zukommen und dauernd verbleiben.

Demgegenüber liegt für die Anwendung des in w linearen (Stokesschen) Gesetzes auf eine Massenerscheinung beliebig geformter Teilchen, auf einen natürlichen Staub, ein wesentlicher Freiheitsgrad in der Tatsache, daß die Bedingungen Gl. (1) und (2)

³ Die Aussage der Gl. (4) ist, wie sich zeigen wird, unabhängig von den Versuchsbedingungen, d. h. sie gilt für einen bestimmten Staub gleichermaßen unter den Bedingungen der Windsichtung (staubeigenes Fallgesetz) wie des Betriebes (betriebseigenes Fallgesetz).

von unendlich vielen Exponentengruppen x_1, y_1, x_2, y_2 zu erfüllen sind. In der unendlichen Vielheit der möglichen Kennlinien bleibt diese Erfüllung freilich trotzdem unbestimmt. Der Grad der Zuständigkeit der [Gl. (27)] ist im Einzelfall eines gegebenen Staubes darnach zu beurteilen, wie nahe die Exponenten seiner Kennlinien den Bedingungen der Gl. (1) und (2) kommen.

Da die Staubtechnik im allgemeinen am Schicksal des einzelnen Korns weniger interessiert ist als am Verhalten der Fraktionen gleicher Teilchengröße oder gleicher Fälligkeit, wiegt der unvermeidliche Verzicht auf die Bestimmung der Einzelwerte ψ und α nicht schwer. Es erscheint vielmehr zweckmäßig, die Untersuchung der Kornverteilung eines Staubes auch hinsichtlich der Kornform auf den Weg der Statistik zu verweisen, der mit dem kombinierten staubeigenen Bremsbeiwert $\psi_\alpha \text{ spez.} = \psi/\alpha = A/R_e^n$ eingeschlagen ist.⁴

Es wird mit anderen Worten dort, wo rechnerische Untersuchungen der Staubtechnik mit Hilfe der Exponenten der Kenngleichungen auf einen bestimmten Staub übergreifen, folgerichtig auch das Fallgesetz dieses Staubes

$$A v^n w^{2-n} - 2 g \frac{\gamma_s}{\gamma_l} (10^{-4} a)^{1+n} = 0$$

herangezogen, wobei für A die [Gl. (26)], für n die [Gl. (25)] zuständig ist.

Die Annahme kugelförmiger Staubeilchen entsprechend $A = 36$, $n = 1$, bzw. das Stokessche Kugelfallgesetz

$$36 v w - 2 g \frac{\gamma_s}{\gamma_l} (10^{-4} a)^2 = 0$$

mögen den Untersuchungen allgemeinen Charakters vorbehalten bleiben.

2. Einfluß veränderter Betriebsbedingungen.

Es sollte mehr als bislang üblich beachtet werden, daß in der Staubtechnik die strengen Voraussetzungen für hydrodynamisch „ähnliche“ Bewegungsvorgänge und damit auch für die Einführung der Reynoldsschen Zahl R_e fehlen. Die Teilchengröße a vermittelt ja keine Aussage über die Gestalt des Einzelkorns; sie faßt vielmehr nur jene Teilchen einer Staubprobe zu einer Fraktion zusammen, denen bei der Sichtung der Durchgang durch Maschen zwischen a und $a + da$ gelungen war. Es fehlt somit, um den Begriff der Reynoldsschen Zahl zu rechtfertigen, nicht nur die geometrische Ähnlichkeit der Teilchen innerhalb einer Fraktion, sondern auch von Fraktion zu Fraktion, noch mehr wohl von der Fraktion a des einen Staubes zur „gleichen“ Fraktion eines anderen Staubes. Und es fehlt die Ähnlichkeit des Strömungsbildes und der Druckverhältnisse an den Teilchen, um von einem gleichbleibenden Verhältnis der Trägheitskräfte zu den Reibungskräften sprechen zu können.

Wenn vorstehend R_e doch zur Bildung des staubeigenen Bremsbeiwertes $\psi_\alpha \text{ spez.}$ herangezogen wurde, so geschah dies, wie die Ableitung der [Gl. (24)] aus [Gl. (21)] zeigt, zunächst nur in dem Sinn einer dem Rückstand R verwandten, weil ebenfalls von dem Wertepaar $(a; w)$ abhängigen Schreibweise, vor allem aber, um dem Stokesschen Kugelbeiwert $36/R_e$ das staubeigene Analogon A/R_e^n gegenüberzustellen.

Dies bleibt zu beachten, wenn nun die staubeigenen Ergebnisse der Windsichtung in betriebseigene übergeführt werden, wenn mit anderen Worten die Betriebsbedingungen einer Entstaubungsanlage nicht mit jenen der Windsichtung übereinstimmen.⁵

⁴ S. Fußnote 1.

⁵ Wo es im folgenden notwendig wird, die Versuchsbedingungen und Ergebnisse der Windsichtung oder Siebung von den Betriebsbedingungen einer Entstaubungsanlage zu unterscheiden, tragen die betreffenden Größen den Zeiger „Windsichtung“ bzw. „Betrieb“, beispielsweise in der Form

$w_{\text{Winds.}}$ oder $w_{\text{Betr.}}$.

Es kann an die Stelle der Luft ein anderes Gas, ferner mit dem Temperaturwechsel $t_{\text{Winds.}}$ in $t_{\text{Betr.}}$ an die Stelle von $\nu_{\text{Winds.}}$ die kinematische Zähigkeit $\nu_{\text{Betr.}}$, an jene von $\gamma_{\text{I Winds.}}$ die Gaswichte $\gamma_{\text{I Betr.}}$ treten. Und es kann schließlich der Staub aus dem Schwerefeld der Windsichtung mit der Beschleunigung g in ein Fliehkraftfeld mit der Beschleunigung b gelangen. Die Staubwichte γ_s eines bestimmten Staubes kann als praktisch unabhängig von den sonstigen Betriebsbedingungen gelten.⁶

Die Art, wie sich der Übergang aus dem Schwerefeld in das Fliehkraftfeld auswirkt, ist am Beispiel des Stokesschen Gesetzes

$$w = \frac{1}{18} \frac{a^2}{\nu} \frac{\gamma_s}{\gamma_l} g = \tau g$$

zu entnehmen: Als Faktor einer Zeitkonstanten τ ist die Erdbeschleunigung g durch die Beschleunigung des neuen Kraftfeldes zu ersetzen.

Nur mit der Annahme kugelförmiger Staubeilchen wird die strenge Bedeutung von R_e zurückgewonnen und der Übergang zu den betriebeigenen Beziehungen ohne weiteres möglich. Denn der dimensionslose Bremsbeiwert $\psi_{\alpha \text{ Kugel}} = 36/R_e$ ist, weil unabhängig von dem Verlauf der Kennlinien, von den Bedingungen der Windsichtung auf beliebige Betriebsbedingungen übertragbar. Es geht also das Kugelfallgesetz, soweit es versuchsmäßig bestätigt bleibt, z. B. das Stokessche Gesetz nach [Gl. (11)]

$$w_{\text{Winds.}} = \frac{1}{18} \frac{\gamma_s}{\gamma_{\text{I Winds.}}} \frac{g}{\nu_{\text{Winds.}}} a_{\text{Winds.}}^2$$

über in

$$w_{\text{Betr.}} = \frac{1}{18} \frac{\gamma_s}{\gamma_{\text{I Betr.}}} \frac{b}{\nu_{\text{Betr.}}} a_{\text{Betr.}}^2 \quad (5)$$

Die bei einer bestimmten Korngröße ($a_{\text{Winds.}} = a_{\text{Betr.}}$) zu erwartenden Geschwindigkeiten des Betriebes und der Windsichtung zeigen das Verhältnis

$$\frac{w_{\text{Betr.}}}{w_{\text{Winds.}}} = \frac{(\gamma_{\text{I}} \cdot \nu)_{\text{Winds.}}}{(\gamma_{\text{I}} \cdot \nu)_{\text{Betr.}}} \frac{b}{g} = \frac{\eta_{\text{Winds.}}}{\eta_{\text{Betr.}}} \frac{b}{g} = k. \quad (6)$$

Anders der Bremsbeiwert $\psi_{\alpha \text{ spez.}} = A/R_e^n$. Für ihn liegt in den Exponenten x_1, x_2, y_1, y_2 eine Bindung an die jeweiligen Gas- und Staubeigenschaften vor. In diesem

⁶ Zwischen den Gaswerten der Windsichtung und des Betriebes, jeweils gültig bei 0° C oder $t^\circ \text{C}$,

also zwischen

spezifischem Gewicht	$\gamma_{\text{I } 0}$	γ_{I}
kinematischer Zähigkeit ..	ν_0	ν
dynamischer Zähigkeit	η_0	η

besteht folgender Zusammenhang:

$$\frac{\gamma_{\text{I Winds.}}}{\gamma_{\text{I Betr.}}} = \frac{\gamma_{\text{I } 0 \text{ Winds.}}}{\gamma_{\text{I } 0 \text{ Betr.}}} \frac{273 + t_{\text{Betr.}}}{273 + t_{\text{Winds.}}},$$

$$\frac{\nu_{\text{Winds.}}}{\nu_{\text{Betr.}}} = \frac{\eta_{\text{Winds.}}}{\eta_{\text{Betr.}}} \frac{\gamma_{\text{I Betr.}}}{\gamma_{\text{I Winds.}}},$$

$$\approx \frac{\nu_0 \text{ Winds.}}{\nu_0 \text{ Betr.}} \sqrt{\frac{150 + t_{\text{Winds.}}}{150 + t_{\text{Betr.}}}} \cdot \frac{273 + t_{\text{Winds.}}}{273 + t_{\text{Betr.}}}.$$

Es ist also beispielsweise in Gl. (9)

$$k \frac{\nu_{\text{Winds.}}}{\nu_{\text{Betr.}}} \approx \frac{b}{g} \frac{\nu_0 \text{ Winds.}}{\nu_0 \text{ Betr.}} \frac{\eta_0 \text{ Winds.}}{\eta_0 \text{ Betr.}} \frac{150 + t_{\text{Winds.}}}{150 + t_{\text{Betr.}}} \frac{273 + t_{\text{Winds.}}}{273 + t_{\text{Betr.}}}.$$

Ist Luft nicht nur Trägergas bei der Windsichtung, sondern auch im Betrieb, z. B. eines Zyklons, so ist

$$\frac{\gamma_{\text{I } 0 \text{ Winds.}}}{\gamma_{\text{I } 0 \text{ Betr.}}} = \frac{\eta_0 \text{ Winds.}}{\eta_0 \text{ Betr.}} = \frac{\nu_0 \text{ Winds.}}{\nu_0 \text{ Betr.}} = 1.$$

Es muß — obwohl wünschenswert und theoretisch denkbar — als praktisch ausgeschlossen gelten, die Fälligkeitslinie statt mit den üblichen Bedingungen mit den Gaswerten des jeweiligen Betriebsfalls oder gar im Fliehkraftfeld aufzunehmen. Wohl aber erscheint die Annahme berechtigt, daß die Aussage der Gl. (6), nämlich

nicht nur für die Kugel, sondern für jede Kornform zutrifft. Diese Annahme erlaubt dann, die Windsichtkurve 2 [Abb. 1 oder 5] den Betriebsbedingungen rechnerisch anzupassen, bevor sie in bekannter Weise zur Bestimmung der Exponenten x_2 und y_2 und des Bremsbeiwertes $\psi_{\alpha \text{ spez.}}$ dient. Es ist mit anderen Worten aus

eine betriebseigene Abhängigkeit

derart abzuleiten, daß (s. Abb. 1) beim Rückstand einer bestimmten Teilchengröße a die Geschwindigkeit $w_{\text{Winds.}}$ in $w_{\text{Betr.}} = k \cdot w_{\text{Winds.}}$ übergeht. Das Aufzeichnen dieses Zusammenhangs erübrigt sich aber im Einzelfall, weil die Exponenten der Kennlinien aus einfachen Überlegungen festliegen:

Das Ergebnis der Siebung, d. i. der Linienzug 1 in [Abb. 1 oder 5] wird natürlich durch einen Wechsel der Gaseigenschaften nicht berührt. Die für einen bestimmten Staub einmal gewonnenen Exponenten der Kör-



nungslinie sind deshalb auf beliebige Gasverhältnisse zu übernehmen, d. h. es ist

Ferner ist in der Bestimmungsgl. (c) der [Fußnote S. 98] für den Exponenten y_2 der Fälligkeitslinie

$$|a w_1| - |a w_2| = |a(k \cdot w_1)| - |a(k \cdot w_2)|,$$

Für den allein richtigzustellenden Exponenten x_2 aber folgt aus Gl. (d) der [Fußnote S. 98]

Zunächst lautet also die [Gl. (28)] mit den Bedingungen der Windsichtung und des Betriebes

$$A_{\text{Betr.}} v_{\text{Betr.}}^n w_{\text{Betr.}}^{2-n} = 2b \frac{\gamma_s}{\gamma_l \text{Betr.}} (10^{-4} a_{\text{Betr.}})^{1+n},$$

⁷ S. Fußnote S. 114.

so daß das Verhältnis der Fallgeschwindigkeiten einer bestimmten Korngröße ($a_{\text{Winds.}} = a_{\text{Betr.}}$) auch gegeben ist durch

$$\frac{w_{\text{Betr.}}}{w_{\text{Winds.}}} = \left[\frac{A_{\text{Winds.}}}{A_{\text{Betr.}}} k \left(\frac{v_{\text{Winds.}}}{v_{\text{Betr.}}} \right)^{n-1} \right]^{\frac{1}{2-n}} \quad (8)$$

Die Verbindung mit Gl. (6) ergibt also

$$\frac{A_{\text{Winds.}}}{A_{\text{Betr.}}} = \left(k \frac{v_{\text{Winds.}}}{v_{\text{Betr.}}} \right)^{1-n} \quad (9)$$

Weiterhin ist [s. Gl. (24)]

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha} \text{ spez. Winds.} &= \left(\frac{A}{R_e^n} \right)_{\text{Winds.}} = A_{\text{Winds.}} \left(\frac{v}{a w} \right)_{\text{Winds.}}^n, \\ \psi_{\alpha} \text{ spez. Betr.} &= \left(\frac{A}{R_e^n} \right)_{\text{Betr.}} = A_{\text{Betr.}} \left(\frac{v}{a w} \right)_{\text{Betr.}}^n, \end{aligned}$$

und mit Gl. (6) für $a_{\text{Winds.}} = a_{\text{Betr.}}$

$$\frac{\psi_{\alpha} \text{ spez. Winds.}}{\psi_{\alpha} \text{ spez. Betr.}} = \frac{A_{\text{Winds.}}}{A_{\text{Betr.}}} \left(\frac{w_{\text{Betr.}}}{w_{\text{Winds.}}} \right)^n \left(\frac{v_{\text{Winds.}}}{v_{\text{Betr.}}} \right)^n = k \frac{v_{\text{Winds.}}}{v_{\text{Betr.}}} = \left(\frac{A_{\text{Winds.}}}{A_{\text{Betr.}}} \right)^{\frac{1}{1-n}} \quad (10)$$

Indem oben $A_{\text{Winds.}}$ an Hand von [Gl. (26)], n an Hand von [Gl. (25)] eingeführt wurden, lieferte das staubeigene Fallgesetz der Windsichtung — d. i. [Gl. (27)] oder auch [Gl. (28)] — die [Gl. (30/31)]. Zu ähnlichen Beziehungen führen nun die betriebs-eigenen Gleichungen

$$\psi_{\alpha} \text{ spez. Betr.} \cdot w_{\text{Betr.}}^2 - 2 b \frac{\gamma_s}{\gamma_l \text{ Betr.}} (10^{-4} a_{\text{Betr.}}) = 0 \quad (11)$$

oder

$$A_{\text{Betr.}} v_{\text{Betr.}}^n w_{\text{Betr.}}^{2-n} - 2 b \frac{\gamma_s}{\gamma_l \text{ Betr.}} (10^{-4} a_{\text{Betr.}})^{1+n} = 0, \quad (12)$$

wenn $A_{\text{Betr.}}$ aus Gl. (9) errechnet oder entsprechend [Gl. (26)]

$$A_{\text{Betr.}} = 2 b \cdot 10^{-4(1+n)} \frac{\gamma_s}{\gamma_l \text{ Betr.}} v_{\text{Betr.}}^{-n} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)_{\text{Betr.}}^{\frac{3}{y_1 + y_2}}$$

gesetzt und n nach [Gl. (25)] eingeführt wird.

Zum gleichen Ziel führt aber schneller folgende Überlegung: Mit der Verwendung der neuen Exponenten der Kenngleichungen tritt

an die Stelle von [Gl. (31)]

$$w_{\text{Winds.}} = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)_{\text{Winds.}}^{\frac{1}{y_2}} \cdot a_{\text{Winds.}}^{\frac{y_1}{y_2}}$$

und ähnlich

an die Stelle von [Gl. (30)]

$$a_{\text{Winds.}} = \left(\frac{x_2}{x_1} \right)_{\text{Winds.}}^{\frac{1}{y_1}} \cdot w_{\text{Winds.}}^{\frac{y_2}{y_1}}$$

die betriebseigene Gl. (13)

$$w_{\text{Betr.}} = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)_{\text{Betr.}}^{\frac{1}{y_2}} \cdot a_{\text{Betr.}}^{\frac{y_1}{y_2}}$$

oder

$$\frac{w_{\text{Betr.}}}{k} = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)_{\text{Winds.}}^{\frac{1}{y_2}} \cdot a_{\text{Betr.}}^{\frac{y_1}{y_2}}$$

die betriebseigene Gl. (14)

$$a_{\text{Betr.}} = \left(\frac{x_2}{x_1} \right)_{\text{Betr.}}^{\frac{1}{y_1}} \cdot w_{\text{Betr.}}^{\frac{y_2}{y_1}}$$

oder

$$a_{\text{Betr.}} = \left(\frac{x_2}{x_1} \right)_{\text{Winds.}}^{\frac{1}{y_1}} \cdot \left(\frac{w_{\text{Betr.}}}{k} \right)^{\frac{y_2}{y_1}}$$

Bemerkenswert ist, daß zwischen den zu einer bestimmten Fallgeschwindigkeit ($w_{\text{Winds.}} = w_{\text{Betr.}}$) gehörigen Teilchengrößen folgender Zusammenhang besteht:

$$\left(\frac{a_{\text{spez.}}}{a_{\text{Stokes}}} \right)_{\text{Betr.}} = \left(\frac{a_{\text{spez.}}}{a_{\text{Stokes}}} \right)_{\text{Winds.}} \cdot \frac{1}{k \frac{y_2}{y_1} - \frac{1}{2}} \quad (15)$$

Im logarithmischen Bild 2 bedeutet dies, daß die Divergenz der Linien $w = f(a)_{\text{spez.}}$ und $w = f(a)_{\text{Stokes}}$ beim Übergang von der Windsichtung zum Betriebsfall unverändert bleibt. Der Schnittpunkt $S_{\text{Winds.}}$ verschiebt sich auf seiner Ordinate nach $S_{\text{Betr.}}$, wobei

$$\lg w|_{S_{\text{Betr.}}} = \lg k + \lg w|_{S_{\text{Winds.}}} \quad (16)$$

Im Sonderfall $k = 1$ decken sich die Betriebsbedingungen in ihrer Auswirkung mit jenen der Windsichtung; die Punkte S in Abb. 2 fallen zusammen.

Im Sonderfall $y_2/y_1 = 1/2$ decken sich die von den beiden Punkten S ausgehenden Linien, d. h. es deckt sich

und

$$w = f(a)_{\text{spez. Winds.}} \quad \text{mit} \quad w = f(a)_{\text{Stokes Winds.}}$$

$$w = f(a)_{\text{spez. Betr.}} \quad \text{mit} \quad w = f(a)_{\text{Stokes Betr.}}$$

Zahlenbeispiel.

Das früher [S. 101] behandelte Beispiel werde derart erweitert, daß der Braunkohlenstaub in einen Zyklon und dabei unter folgende Bedingungen tritt:

$$\frac{b}{g} = 10^3; \quad \frac{t_{\text{Betr.}}}{t_{\text{Winds.}}} = \frac{360^\circ \text{ C}}{20^\circ \text{ C}}; \quad \frac{\eta_0 \text{ Betr.}}{\eta_0 \text{ Winds.}} = 1.$$

Die letzte Bedingung soll besagen, daß Luft auch Trägergas im Zyklon ist. Zunächst folgt aus Gl. (6) (vgl. auch Fußnote S. 116)

$$k = 10^3 \sqrt{\frac{150 + 20}{150 + 360}} = 10^3 \sqrt{\frac{1}{3}} = 577,4.$$

Es kann also z. B. das Stokessche Kugelfallgesetz mit den Betriebswerten in folgenden Formen angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} a_{\text{Betr.}} &= \sqrt{18 \frac{\nu_{\text{Betr.}}}{b} \frac{\gamma_l \text{ Betr.}}{\gamma_s} w_{\text{Betr.}}^{1/2}} \\ &= \sqrt{18 \frac{\nu_{\text{Winds.}}}{g} \frac{\gamma \text{ Winds.}}{\gamma_s} \left(\frac{w_{\text{Betr.}}}{k}\right)^{1/2}} \\ &= \mathfrak{U}_{\text{Stokes Winds.}} \left(\frac{w_{\text{Betr.}}}{k}\right)^{1/2} = \frac{15,15}{24,03} w_{\text{Betr.}}^{1/2} \\ &= 0,63 w_{\text{Betr.}}^{1/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Der weitere Schritt zu dem staubeigenen Fallgesetz des Betriebes aber erfordert zunächst die Exponenten der betriebseigenen Kennlinien:

$$x_1 \text{ Betr.} = x_1 \text{ Sieb.} = 0,04186; \quad y_1 \text{ Betr.} = y_1 \text{ Sieb.} = 0,9478,$$

$$x_2 \text{ Betr.} = x_2 \text{ Winds.} \cdot \frac{1}{577,4^{0,7812}}; \quad y_2 \text{ Betr.} = y_2 \text{ Winds.} = 0,7812,$$

$$= \frac{0,2512}{143,4} = 0,00175.$$

Es wird ferner

$$\frac{\gamma_l \text{ Winds.}}{\gamma_l \text{ Betr.}} = \frac{273 + 360}{273 + 20} = \frac{633}{293} = 2,16,$$

$$\frac{\nu_{\text{Winds.}}}{\nu_{\text{Betr.}}} = \sqrt{\frac{150 + 20}{150 + 360}} \cdot \frac{293}{633} = 0,267,$$

$$k \cdot \frac{\nu_{\text{Winds.}}}{\nu_{\text{Betr.}}} = 577,4 \cdot 0,267 = 154$$

und nach Gl. (9) mit $n = 0,644$

$$A_{\text{Betr.}} = \frac{47,54}{154^{0,356}} = \frac{47,54}{6,02} = 7,89,$$

d. i. ein Wert, der sich auch aus der sinngemäßen Anwendung der [Gl. (26)] ergibt.
Nach Gl. (10) wird

$$\psi_{\alpha \text{ spez. Betr.}} = \frac{\psi_{\alpha \text{ spez. Winds.}}}{154}$$

Zum Aufbau der Abb. 2 dient dann entweder Gl. (12) oder einfacher Gl. (13)

$$\frac{w_{\text{Betr.}}}{577,4} = 0,101 a_{\text{Betr.}}^{1,213}, \quad \text{d. h. } w_{\text{Betr.}} = 58,3 a_{\text{Betr.}}^{1,213},$$

bzw. Gl. (14)

$$a_{\text{Betr.}} = 6,62 \left(\frac{w_{\text{Betr.}}}{577,4} \right)^{0,824} = 0,035 w_{\text{Betr.}}^{0,824}$$

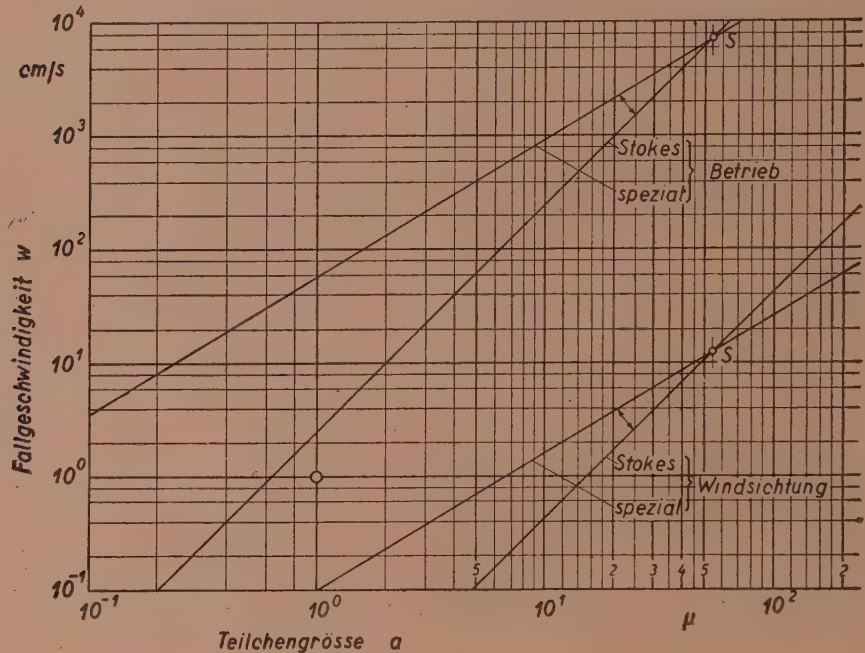


Abb. 2.

Nach Gl. (15) verhält sich bei einer bestimmten Fallgeschwindigkeit, z. B. bei $w = 1 \text{ cm/s}$,

$$\left(\frac{a_{\text{spez.}}}{a_{\text{Stokes}}}_{\text{Betr.}} \right) = \left(\frac{a_{\text{spez.}}}{a_{\text{Stokes}}}_{\text{Winds.}} \right) \cdot 577,4^{-(0,824 - 0,5)},$$

d. h.

$$\frac{0,035 \cdot 1^{0,824}}{0,63 \cdot 1^{0,5}} = \frac{6,62 \cdot 1^{0,824}}{15,15 \cdot 1^{0,5}} \cdot 577,4^{-0,324},$$

oder

$$0,055 = 0,055.$$

Der Schnittpunkt $S_{\text{Winds.}}$ rückt bei $a = 54,2 \mu$ [s. Gl. (4)] von $w_{\text{Winds.}} = 13,1 \text{ cm/s}$ nach $S_{\text{Betr.}}$, d. h. nach $w_{\text{Betr.}} = 577,4 \cdot 13,1 = 7570 \text{ cm/s}$.

Abb. 2 bestätigt übrigens auch das zu einer bestimmten Teilchengröße ($a_{\text{Winds.}} = a_{\text{Betr.}}$) gehörige Verhältnis:

$$\left(\frac{w_{\text{spez.}}}{w_{\text{Stokes}}}_{\text{Betr.}} \right) = \left(\frac{w_{\text{spez.}}}{w_{\text{Stokes}}}_{\text{Winds.}} \right),$$

z. B. für $a = 1 \mu$ unter Beachtung von Gl. (17)

$$\frac{58,3 \cdot 1^{1,213}}{1^2 \cdot \frac{577,4}{15,15^2}} = \frac{0,101 \cdot 1^{1,213}}{1^2 \cdot \frac{1}{15,15^2}},$$

oder

$$23,2 = 23,2.$$

Zusammenfassung.

Das staubeigene Fallgesetz, das unter Benutzung des Gaußschen Verteilungsgesetzes aus den Ergebnissen der Siebung und der Windsichtung eines bestimmten Staubes abzuleiten ist, läßt sich in einfacher Weise auf beliebige Bedingungen eines Betriebes, z. B. einer Entstaubungsanlage, übertragen, in dem der betreffende Staub verarbeitet wird.

Unter den Bedingungen der Windsichtung hat sich die zahlenmäßige Nutzanwendung, nachdem die Exponenten der Kenngleichungen bestimmt waren, auf die Auswertung der [Gl. (30) oder (31)] beschränkt. An die Stelle dieser Gleichungen treten unter den Bedingungen des Betriebes die Gl. (14) oder (13).

(Eingegangen am 20. Dezember 1945.)

Zusammensetzung von Belastungsströmen unruhiger Verbraucher, die Pendelungsleistung.

Von R. Schön, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Als reiner Sinus- oder Einwellenstrom pflegt ein gleichbleibender oder stationärer Wechselstrom bezeichnet zu werden, der innerhalb jeder Periode genau sinusförmig verläuft. Solche Ströme treten in Wechselstromnetzen nicht gerade häufig auf; es sind zwei Arten der Abweichungen von der Sinusform zu unterscheiden: der Stromverlauf kann bei von Periode zu Periode gleichbleibender Amplitude von der Sinusform abweichen (Mehrwellenstrom), er kann aber auch bei Sinusgrundform seine Amplitude unabhängig von der Netzperiode ändern (modulierter Einwellenstrom).¹ In beiden Fällen führt die Anwendung der bekannten Regeln für die Zusammensetzung von Einwellenströmen zu ungenauen, bei großen Abweichungen von der Sinusform zu unbrauchbaren Ergebnissen. Die erste Art der Abweichung kann bei den häufigsten Verbrauchern, wie Drehstromasynchron- und Synchronmotoren, Kollektormaschinen, belasteten Transformatoren und elektrischen Glühlampen beim Zusammensetzen der Ströme erfahrungsgemäß vernachlässigt werden. Für größere Abweichungen dieser Art finden sich ausführliche Angaben in allen einschlägigen Büchern.² Die zweite Art der Abweichung wird in der Starkstromliteratur recht stiefmütterlich behandelt. Sie kommt dadurch zustande, daß Motoren ungleichmäßig belastet werden, wie beispielsweise die Antriebsmotoren von Fördermaschinen, Walzwerken, schwungradlosen Scheren und deren Transporteinrichtungen, Hebezeugen, Hobelmaschinen, Schrägaufzügen, Triebwagen, Lokomotiven u. dgl., oder daß beispielsweise eine größere Anzahl Glühlampen häufig ein- und ausgeschaltet wird (Reklamebeleuchtung). Bei solchen unruhigen Verbrauchern behilft man sich vielfach,

¹ Der Ausdruck ist der Radiotechnik entlehnt.

² Vgl. beispielsweise A. Fraenckel: Theorie der Wechselströme.

wenn man sich nicht zu der mühevollen punktweisen Addition der Belastungskurven und zur Ermittlung des effektiven Summenstromes aus diesem Summendiagramm entschließt, mit empirischen Rechnungsgrößen, wie Gleichzeitigkeitsfaktor, Verschiedenheitsfaktor u. dgl.; häufig wird die effektive Stromaufnahme mehrerer solcher Verbraucher recht ungenau dadurch bestimmt, daß die effektiven Ströme der einzelnen Verbraucher einfach arithmetisch oder geometrisch addiert werden, als ob sie Einwellendauerströme wären. In den meisten Fällen ist jedoch eine exakte Zusammensetzung möglich, die kaum mehr Mühe macht als die bisher üblichen Verfahren und die daher im folgenden angegeben werden soll. Es wird sich zeigen, daß recht erhebliche Fehler durch das neue Verfahren vermieden werden können. Das Verfahren ist auch auf Gleichströme anwendbar, deren Amplitude sich ändert, also auf modulierte Gleichströme im Gegensatz zu gleichbleibenden oder stationären Gleichströmen. Um das Wesentliche klar hervortreten zu lassen, soll zunächst von Gleichströmen ausgegangen werden.

1. Zerlegung eines periodisch modulierten Gleichstromes in seine „effektiven Komponenten“.

Gleichstromgespeiste unruhige Verbraucher, deren veränderliches Drehmoment in gleichen Zeitabschnitten (der Spieldauer oder Belastungsperiode) gleichartig oder

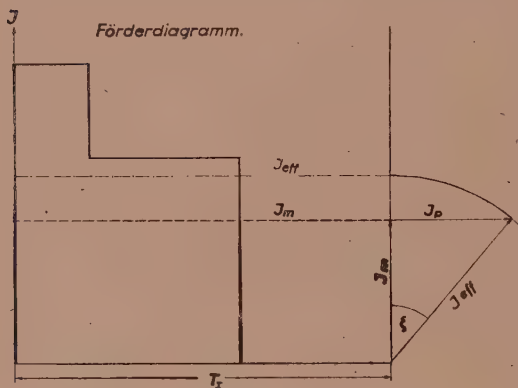


Abb. 1.

periodisch wiederkehrt, nehmen einen periodisch modulierten Gleichstrom auf und können sinngemäß als periodische Verbraucher bezeichnet werden. Ein solcher periodischer Verbraucher ist beispielsweise eine Koepefördermaschine, deren Stromaufnahmeschwankungen Abb. 1 für den einfachsten Fall (Gewicht des Unterseiles gleich dem des Oberseiles je Meter, kein Umsetzen, freier Auslauf) zeigt. Obwohl dieselbe Modulationskurve auch für den Wechsel- (Effektiv-) Strom einer drehstromgespeisten Koepemaschine gilt und dieser Fall der praktisch wichtigere wäre, soll sie zunächst aus methodischen

Gründen aufgefaßt werden als „modulierte Gleichstromaufnahme“ einer an konstante Gleichspannung angeschlossenen Treibscheibenfördermaschine mit Gleichstromneben-schlußmotor und Anfahrwiderstand.

Die Gleichung des modulierten Gleichstromes nach Abb. 1 kann in folgender Form geschrieben werden:

$$i = i_m + i_{p1} \sin(\omega_I t + \varphi_{I1}) + i_{p2} \sin(2 \omega_I t + \varphi_{I2}) + \dots \quad (1)$$

Darin bedeutet: i_m den mittleren stationären Gleichstrom, i_{p1} i_{p2} die harmonischen Komponenten des Modulationsstromes i_p , $\omega_I = 2 \pi \nu_I = \frac{2 \pi}{T_I}$ die Modulationsfrequenz φ_{I1} , φ_{I2} die Phasenwinkel der einzelnen Harmonischen.

Rechnet man den linearen Mittelwert der Stromamplitude i während der Modulationsperiode T_I , so ist zu beachten, daß jede Harmonische i_{p1} , i_{p2} usw. während dieser Zeit eine ganze Zahl von Sinusschwingungen ausführt; der lineare Mittelwert jeder harmonischen Komponente und damit der von i_p beträgt Null. Der lineare Mittelwert von i reduziert sich also auf den stationären Gleichstrom i_m , dessen Größe

als linearer Mittelwert in bekannter Weise durch Planimetrieren gefunden werden kann. Der übrigbleibende Modulationsstrom

$$i_p = i_{p1} \sin(\omega_I t + \varphi_{I1}) + i_{p2} \sin(2\omega_I t + \varphi_{I2}) + \dots$$

schwankt zwischen positiven und negativen Werten so, daß keine Leistung dem Verbraucher zugeführt wird, sondern nur eine Leistungspendelung zwischen Kraftwerk und Verbraucher übertragen wird; er möge daher starkstromtechnisch besser Pendelungsstrom heißen. Seine Frequenz ist die Modulations-, Pendelungs- oder Belastungsfrequenz ω_I .

Der quadratische Mittelwert des Gesamtstromes oder der effektive Gesamtstrom J_{eff} beträgt für jede Belastungsperiode T_I :

$$J_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{T_I}} \sqrt{\int_0^{T_I} [i_m + i_{p1} \sin(\omega_I t + \varphi_{I1}) + i_{p2} \sin(2\omega_I t + \varphi_{I2}) + \dots]^2 dt} =$$

$$= \sqrt{i_m^2 + \frac{i_{p1}^2}{2} + \frac{i_{p2}^2}{2} + \dots} \quad (2)$$

Bei der Berechnung des Quadrates wurden die ungeraden Sinuspotenzen weggelassen, weil ihre Integrale über die Spieldauer T_I der Grundschwingung $\sin \omega_I t$ Null betragen. Auch das Integral der ungeraden Kosinuspotenzen ergibt für jede Spieldauer T_I den Wert 0. Alle Phasenwinkel fallen bei der Integration heraus.

Für $i_m = 0$ erhält man aus Gl. (2) den effektiven Pendelungsstrom $J_p = \sqrt{\frac{i_{p1}^2}{2} + \frac{i_{p2}^2}{2} + \dots}$. Der effektive Strom J_m ist identisch mit dem stationären Gleichstrom i_m . Gl. (2) kann daher auch in der allgemeineren Form geschrieben werden:

$$J_{\text{eff}} = \sqrt{J_m^2 + J_p^2} \quad (3)$$

Der effektive Gesamtstrom kann nach Gl. (3) in zwei rechtwinkelig zusammensetzende Komponenten zerlegt werden: den effektiven stationären oder mittleren Strom J_m und den effektiven Modulations- oder Pendelungsstrom J_p ; J_m und J_p sind die „effektiven Komponenten“ des effektiven Gesamtstromes J_{eff} .

Da der mittlere Strom J_m für den Energieverbrauch, der effektive Strom J_{eff} für die Kupferverluste, Erwärmung und Maschinengröße ausschlaggebend ist, müssen sie beide bei genaueren Planungen bekannt sein. Der (effektive) Pendelungsstrom kann daher aus Gl. (3) ohne harmonische Analyse in einfachster Weise bestimmt werden zu:

$$J_p = \sqrt{J_{\text{eff}}^2 - J_m^2} \quad (3a)$$

Dieses Ergebnis entspricht der bekannten Regel, daß ein stationärer Gleich- und ein effektiver Wechselstrom³ unter 90° zusammensetzen sind. Abb. 1 zeigt rechts die vektorielle Zusammensetzung von J_p und J_m zu J_{eff} .

Um anzudeuten, daß J_p auf eine Belastungsfrequenz ω_I zurückzuführen ist, wird mitunter $J_p(\omega_I)$ und $J_{\text{eff}}(\omega_I)$ an Stelle von J_p und J_{eff} geschrieben werden.

2. Zusammensetzung von zwei oder mehr periodisch modulierten Gleichströmen.

Die beiden periodisch modulierten Gleichströme

$$\text{und} \quad i_I(\omega_I) = i_{mI} + i_{p1I} \sin(\omega_I t + \varphi_{1I}) + i_{p2I} \sin(2\omega_I t + \varphi_{2I}) + \dots$$

$$i_{II}(\omega_{II}) = i_{mII} + i_{p1II} \sin(\omega_{II} t + \varphi_{1II}) + i_{p2II} \sin(2\omega_{II} t + \varphi_{2II}) + \dots$$

sollen nun addiert und der Effektivwert bestimmt werden. Das ist in einfacher Weise exakt möglich, wenn das Integrationsintervall $T = m \cdot T_I = n \cdot T_{II}$ und $i_{p(nI)I}$ oder $i_{p(nII)II} = 0$ ist, wobei m und n zwei verschiedene ganze Zahlen von

³ Genauer stationärer Wechselstrom.

1 bis ∞ sein können und ν nacheinander alle ganzen Zahlen von 1 bis ∞ durchläuft. Hierdurch ist der Fall $m = n = 1$ als Synchronismus der Grundwellen ausgeschlossen; für ihn gelten die bekannten Regeln für die Zusammensetzung von Ein- und Mehrwellenströmen, wozu nicht nur die Grundharmonischen i_{p1I} und i_{p1II} , sondern auch die Phasenwinkel φ_{1I} und φ_{1II} sowie alle Oberwellen samt deren Phasenwinkeln bekannt sein müßten. Teilerfremdheit von T_I und T_{II} ist hingegen mit eingeschlossen und erwünscht, weil dann $m T_I = n T_{II} = \infty$ gilt und jede Einschränkung für die Oberwellen entfällt. Der Fall $m = 1, n = 2$ ist beispielsweise nur zulässig, wenn i_{pII} keine zweite Oberwelle enthält und wenn alle übrigen Oberwellen nur in einer der beiden Modulationskurven vorkommen. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 J_{\text{eff}} &= \frac{1}{\sqrt{m T_I}} \sqrt{\int_0^{m T_I} \left\{ (i_{mI} + i_{mII})^2 + 2 (i_{mI} + i_{mII}) \left[\nu \sum_1^{\infty} i_{p\nu I} \sin(\nu \omega_I t + \varphi_{\nu I}) + \right. \right.} \\
 &\quad \left. \left. + \mu \sum_1^{\infty} i_{p\mu II} \sin(\mu \omega_{II} t + \varphi_{\mu II}) \right] + \nu \sum_1^{\infty} i_{p\nu I}^2 \sin^2(\nu \omega_I t + \varphi_{\nu I}) + \right.} \\
 &\quad \left. + \mu \nu \sum_1^{\infty} i_{p\nu I} i_{p\mu II} \sin(\nu \omega_I t + \varphi_{\nu I}) \sin(\mu \omega_{II} t + \varphi_{\mu II}) + \right. \\
 &\quad \left. + \mu \sum_1^{\infty} i_{p\mu II}^2 \sin^2(\mu \omega_{II} t + \varphi_{\mu II}) \right\} dt = \\
 &= \sqrt{(i_{mI} + i_{mII})^2 + \nu \sum_1^{\infty} \frac{i_{p\nu I}^2}{2} + \mu \sum_1^{\infty} \frac{i_{p\mu II}^2}{2}} = \\
 &= \sqrt{(J_{mI} + J_{mII})^2 + J_p^2(\omega_I) + J_p^2(\omega_{II})}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Bei der Integration wurde berücksichtigt, daß alle ungeraden Sinus- und Kosinuspotenzen, ferner alle Produkte von Sinusfunktionen verschiedener Frequenz für ganzzahlige Vielfache ihrer Perioden Null werden.

Die Einschränkung $i_{p\nu nI}$ oder $i_{p\nu mII} = 0$ wurde gemacht, weil auch die synchron laufenden Oberwellen, wenn sie vorhanden wären, phasenrichtig addiert werden müßten.⁴ Die Belastungsperiode wird jedoch selbst bei Koepefördermaschinen, die einen ziemlich präzisen periodischen Verbraucher darstellen, nur mit $\delta = (2-5\%)$ Duldung eingehalten, so daß sich die höheren Oberwellen während der Zeit $m T_I$ um mehr als 360° gegeneinander verdrehen und der gerechnete Mittelwert über ganzzahlige Vielfache von 360° bestens entspricht.

Der Verdrehungswinkel der n -ten Oberwelle und damit die Anwendungsgrenze ergibt sich aus der Beziehung, daß die n -te Oberschwingung im Integrationsintervall $m T_I$ $m \cdot n$ ganze Umdrehungen macht. Einer Toleranz $\pm \delta$ entspricht daher ein Ausschlag gegenüber der Mittellage von $\delta \cdot m \cdot n \cdot 360^\circ$. Dieser Ausschlag

$$\delta \cdot m \cdot n \cdot 360^\circ \geq 180^\circ \quad (4a)$$

muß also größer oder gleich 180° sein, wenn auch die theoretisch synchron laufenden, in Wirklichkeit um eine Mittellage pendelnden Oberwellenvektoren jede gegenseitige Lage annehmen sollen, wie in Gl. (4) vorausgesetzt ist. Man erhält aus Gl. (4a) die Bedingung für die zulässigen Ordnungszahlen der Oberwellen:

$$m \cdot n \geq \frac{1}{2\delta} = 25 \text{ bis } 10; \quad (4b)$$

⁴ Auch bei der graphischen Addition ergeben oberwellenreiche Belastungskurven mit gemeinsamer Summenperiode je nach der gegenseitigen Phasenlage etwas verschiedene effektive Summenbelastungsströme.

unzulässig sind daher nur die Wertepaare $m \cdot n < \frac{1}{2\delta}$, die erforderlichenfalls durch kleine Veränderungen der mittleren Belastungsperioden leicht vermieden werden können. $m \cdot n = \frac{T_I T_{II}}{\mu}$, wenn μ das größte gemeinsame Maß von T_I und T_{II} bedeutet. Nun ist es leichter, μ zu verkleinern als zu vergrößern. Wer zwei große Fördermaschinen unabhängig voneinander betreiben will, kann die Förderpausen so einrichten, daß das einfache ganzzahlige Verhältnis verstimmt, also μ verkleinert wird. Dadurch werden nebenbei die Zentrale etwas gleichmäßiger belastet und die Kupferverluste ein wenig vermindert.

Es gibt jedoch noch eine zweite Anwendungsgrenze für das Rechnen mit den effektiven Komponenten: das sind die Temperaturschwankungen innerhalb des Integrationsintervalles $m T_I$. Durch den Ausdruck $\mu, \nu \sum_1^{\infty} i_{p\nu I} i_{p\mu II} \sin(\nu \omega_I t + \varphi_{\nu I}) \sin(\mu \omega_{II} t + \varphi_{\mu II})$ sind Schwebungen zwischen den beiden Modulationskurven verschiedener Frequenz bestimmt nach der bekannten Gleichung

$$2 \sin \omega_I t \sin \omega_{II} t = \sin(\omega_I + \omega_{II}) t + \sin(\omega_I - \omega_{II}) t.$$

Der Kreisfrequenz $\omega_I - \omega_{II}$ entspricht eine Schwebungsdauer $T_{II-I} = \frac{T_{II} T_I}{T_{II} - T_I}$, die für geringe Unterschiede zwischen T_{II} und T_I so groß werden kann, daß der zugehörige Schwebungsstrom $\sqrt{i_{pI} \cdot i_{pII}}$ im Endzustand unzulässige Temperaturschwankungen hervorruft. Diese Temperaturschwankungen sind sowohl der Zeit als auch dem Quadrat der Stromschwankungen gegenüber dem effektiven Strome proportional. Die REM des VDE begrenzen die Spieldauer für AB und DAB mit 10 Minuten für die Einschalt Dauern 40, 25 und 15%. Da einer Einschaltdauer von 15% eine verhältnismäßig große Überschußfläche entspricht, genügt es für einen Verbraucher, wenn $T_{\max} = T_I < 10 \text{ Min.} = 600 \text{ Sek.}$ ist. Für zwei Verbraucher ist die längste aller Perioden ausschlaggebend. Hier wird aber durch Überlagerung der übrigen Perioden die Amplitude außerdem vergrößert. Es genügt daher nicht in allen Fällen, die längste aller Perioden zu vergleichen. Zur Sicherheit muß hier noch die zweit längste hinzugenommen werden:

$$T_{\max 2} = T_I + T_{II-I} \text{ oder } T_I + T_{II} < 600 \text{ Sekunden. Ungl. 4e.}$$

Bei drei Verbrauchern muß die dritt längste Periode hinzugenommen werden, da sich hier drei Spitzen überdecken können usw. Für kleinere Stromschwankungen mit kleinerer Überschußfläche sind natürlich wesentlich längere $T_{\max n}$ zulässig als nach dieser notwendigen, für die Abgrenzung aber nicht hinreichenden Bedingung. Eine engere Abgrenzung bleibt einer in Vorbereitung befindlichen Arbeit des Verfassers⁵ vorbehalten.

Mit der Einschränkung $m \cdot n \geq 10$ bis 25 kann Gl. (4) zur Berechnung von Kupferverlusten und Wirkungsgraden verwendet werden; ist außerdem die Ungleichung $T_{\max n} < 10 \text{ Minuten}$ erfüllt, so treten auch keine unzulässigen Temperaturspitzen bei Enderwärmung auf; ist sie nicht erfüllt, so ist eine genauere Temperaturkontrolle erforderlich.

Periodisch modulierte Gleichströme werden also addiert, indem man die stationären Gleichströme algebraisch, die Pendelungsströme unter 90° geometrisch addiert. Wie für die Zerlegung, ist auch für die Addition der Effektivwerte die Kenntnis der einzelnen Oberschwingungen nicht notwendig. Um alle Oberschwingungen rechtwinkelig zusammenzusetzen, genügt es, die beiden Pendelungsströme rechtwinkelig zusammenzusetzen.

⁵ Zulässigkeitsgrenzen für das Rechnen mit effektiven Komponenten.

Sind drei oder mehr periodisch modulierte Gleichströme zu addieren, so gilt analog:

$$J_{\text{eff}}^2 = (J_{m\text{I}} + J_{m\text{II}} + J_{m\text{III}} \dots)^2 + J_{p\text{I}}^2 (\omega_{\text{I}}) + J_{p\text{II}}^2 (\omega_{\text{II}}) + J_{p\text{III}}^2 (\omega_{\text{III}}) + \dots \quad (5)$$

Man sieht bereits, daß der Fehler, den man macht, wenn man die einzelnen effektiven Gleichströme einfach algebraisch addiert, desto größer wird, je höher der Anteil der Pendelungsströme und je größer die Zahl der Summanden ist.

Bei drei Verbrauchern beträgt der bezogene Fehler beispielsweise

$$\Delta_3 = \frac{J_{\text{Ieff}} + J_{\text{IIeff}} + J_{\text{IIIeff}}}{\sqrt{(J_{m\text{I}} + J_{m\text{II}} + J_{m\text{III}})^2 + J_{p\text{I}}^2 + J_{p\text{II}}^2 + J_{p\text{III}}^2}} - 1. \quad (5a)$$

Für n Verbraucher lautet der Fehler

$$\Delta_n = \frac{\sum_{v=1}^n J_{\text{eff}v}}{\sqrt{\left(\sum_{v=1}^n J_{mv}\right)^2 + \sum_{v=1}^n J_{pv}^2}} - 1$$

und beträgt somit für $n = \infty$

$$\Delta_\infty = \frac{\sum J_{\text{eff}}}{\sum J_m} - 1, \quad (5b)$$

weil in diesem Falle $\sum_{v=1}^n J_{pv}^2$ vernachlässigbar ist gegenüber $\left(\sum_{v=1}^n J_{mv}\right)^2$; bei sehr zahlreichen Verbrauchern sind also nicht die effektiven, sondern die mittleren Ströme in sehr guter Annäherung zu addieren; dasselbe gilt, wenn ein oder mehrere unruhige Verbraucher ein verhältnismäßig sehr großes Netz belasten, denn auch in diesem Falle ist $\sum_{v=1}^n J_{pv}^2$ vernachlässigbar gegenüber $\left(\sum_{v=1}^n J_{mv}\right)^2$.

3. Erweiterung des Anwendungsbereiches auf periodisch modulierte Einwellenströme.

Für Wechselstrom ergeben sich folgende grundlegende Unterschiede:

1. Leistungsfaktor: Die Modulationskurve (Förderdiagramm) muß zur exakten Behandlung für den Wirk- und für den Blindstrom gegeben sein. Der Gleichstromgleichung (1) entsprechen bei Einwellenstrom die beiden Gleichungen:

$$i_w = [i_m \cos \varphi_m + i_{p1} \cos \varphi_{p1} \sin (\omega_1 t + \varphi_{11}) + i_{p2} \cos \varphi_{p2} \sin (2 \omega_1 t + \varphi_{12}) + \dots] \cdot \sin (\omega t + \varphi_t); \text{Wirkstrom,}$$

$$i_b = [i_m \sin \varphi_m + i_{p1} \sin \varphi_{p1} \sin (\omega_1 t + \varphi_{11}) + i_{p2} \sin \varphi_{p2} \sin (2 \omega_1 t + \varphi_{12}) + \dots] \cdot \sin \left(\omega t + \varphi_t - \frac{\pi}{8} \right); \text{Blindstrom.}$$

Die effektiven Komponenten lauten somit: $J_m \cos \varphi_m = \frac{i_m \cos \varphi_m}{\sqrt{2}}$, der mittlere Wirkeffektivstrom, wobei i_m die Amplitude des stationären Wechselstromes ist;

$J_m \sin \varphi_m = \frac{i_m \sin \varphi_m}{\sqrt{2}}$, der mittlere Blindeffektivstrom;

$$J_p (\omega_1)_w = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{\infty} i_{pn}^2 \cos^2 \varphi_{pn}}{4}}, \text{ Effektivwert des Pendelungswirkstromes;}$$

$$J_p (\omega_1)_b = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^{\infty} i_{pn}^2 \sin^2 \varphi_{pn}}{4}}, \text{ Effektivwert des Pendelungsblindstromes.}$$

Abb. 2 zeigt ein Förderdiagramm für Einwellenstrom und die Komponentenzerlegung; die Zahlenwerte, die der Abbildung zugrunde liegen, sind eingetragen.

Für die effektiven Komponenten fallen bei Einwellenstrom die einzelnen Oberwellen genau so heraus wie bei Gleichstrom. Beachtenswert ist, daß der Leistungsfaktor ($\cos \varphi$) des Pendelungsstromes zwar keine anschauliche Bedeutung hat, weil es sich um einen Strom wechselnder Amplitude handelt, trotzdem aber durch das Wirk- und Blindstromdiagramm eindeutig bestimmt und in Abb. 1 der entsprechende Winkel φ_p eingetragen ist. Für die Addition ist er unwesentlich, weil die Pendelungsströme unter einem Winkel von 90° zusammengesetzt werden.

2. Für die Komponentenzerlegung gelten bei Wechselstrom genau genommen die weiteren Einschränkungen, daß die Spieldauer der Belastung T ein ganzzahliges Vielfaches der halben Netzperiode $\frac{1}{2\omega}$ betragen muß und daß eine Oberschwingung mit der Frequenz $q\omega_I = \omega$ nicht vorkommen darf. Sie sind beide praktisch belanglos, solange ω beträchtlich größer als ω_I ist. Außerdem verursacht ihre Nichteinhaltung einen geringeren Fehler als die Einschaltströme, die zumeist unberücksichtigt bleiben.

3. Für die Zusammensetzung gilt entsprechend Gl. (4) die folgende Gleichung:

$$J_{\text{eff } w} = \sqrt{(J_{mI} \cos \varphi_{mI} + J_{mII} \cos \varphi_{mII})^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} J_{pIn}^2 (\omega_I) \cos^2 \varphi_{pIn} + \sum_{n=1}^{n=\infty} J_{pII n}^2 (\omega_{II}) \cos^2 \varphi_{pII n};}$$

sowie

$$J_{\text{eff } b} = \sqrt{(J_{mI} \sin \varphi_{mI} + J_{mII} \sin \varphi_{mII})^2 + \sum_{n=1}^{n=\infty} J_{pIn}^2 (\omega_I) \sin^2 \varphi_{pIn} + \sum_{n=1}^{n=\infty} J_{pII n}^2 (\omega_{II}) \sin^2 \varphi_{pII n}}$$

und

$$J_{\text{eff}} = \sqrt{(J_{mI} \cos \varphi_{mI} + J_{mII} \cos \varphi_{mII})^2 + (J_{mI} \sin \varphi_{mI} + J_{mII} \sin \varphi_{mII})^2 + J_p^2 (\omega_I) + J_p^2 (\omega_{II});} \quad (6a)$$

außerdem gilt die Einschränkung, daß neben $q\omega_I = \omega$ auch $p\omega_{II} = \omega$ wegen Synchronismus nicht vorkommen darf. Diese Einschränkung betrifft bei 2 bis 200 Sekunden Spieldauer die 100. bis 10000. Oberwelle. Für sie gilt im verstärkten Maße das über i_{pvnI} oder $i_{pvmII} = 0$ Gesagte. Diese Oberwellen drehen sich innerhalb einer Belastungsperiode mehrmals um 360° , so daß die Mittelwertbildung nach Gl. (6a) den höchsten praktischen Anforderungen genügt.

Im Sonderfall, daß das Integrationsintervall $T = \frac{T_I T_{II}}{\mu} = \infty$ und weder $2\omega T_I$ noch $2\omega T_{II}$ ganze Zahlen sind, entfällt jede Einschränkung hinsichtlich der Oberwellen. Bei Drehstrom ist die Nichteinhaltung der Bedingungen, daß $\frac{1}{2\omega}$, T_I und T_{II} ganzzahlige gemeinsame Vielfache haben sollen, schon deshalb zulässig, weil das Summendrehmoment aller drei Phasen konstant ist. Bei Wechselstrom würde sie geringfügige Unterschiede in den Belastungsperioden bei exakt gleichbleibender Belastung zur Folge haben. Diese sind aber erstens nicht unerwünscht und zweitens in Anbetracht der geringen, in einer halben Netzperiode enthaltenen Arbeit so gering, daß sie selbst bei $16^{2/3}$ Perioden unterhalb der Meßgenauigkeit liegen. Teilerfremdheit von T_I und T_{II} ist also nicht nur bei Gleich-, sondern auch bei Dreh- und Wechselstrom vorteilhaft.

Obwohl es allgemein üblich ist, bei Wechselstrom genau so mit effektiven Strömen zu rechnen wie bei Gleichstrom, ist eine Zahlenangabe über die Größe der Ungenauigkeit und das kleinstzulässige Verhältnis $\frac{T_I}{T}$ mit Rücksicht auf den beträchtlich vergrößerten Anwendungsbereich erwünscht.

Für stationäre Belastung, die während der Zeit T_I eingeschaltet ist, erhält man

$$J_{\text{eff}}^2 = \frac{\int_0^{T_I} i^2 \sin^2 \omega t dt}{T_I} = \frac{i^2}{T_I} \int_0^{T_I} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt = \frac{i^2}{2} \left(1 - \frac{1}{2\omega T_I} \sin 2\omega T_I \right).$$

Um den größten möglichen Fehler zu finden, soll der Phasenwinkel außer Betracht bleiben. Die Höchstwerte des bezogenen Fehlerquadrates ergeben sich für

$$2\omega T_I = \frac{4\pi T_I}{T} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \dots$$

und betragen

$$\Delta^2 = \frac{1}{2\omega T_I} = \frac{1}{4\pi} \frac{T}{T_I}, \quad (6b)$$

wenn $T_I < \frac{T}{8}$ ausgeschlossen und die Verbindungslinie der Höchstwerte als Einhüllende aller möglichen Fehlerwerte angesehen wird.

Für rechteckige Belastung ergibt sich nur insofern eine Vergrößerung, als die Fehlerquadrate, die bei abgesetzter Strombelastung J auftreten, auf den effektiven Strom $J_{\text{eff}} = J \sqrt{\varepsilon}$ zu beziehen sind:

$$\Delta^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{T}{T_I} \frac{1}{\varepsilon}. \quad (6c)$$

Bei sinusförmiger Belastung wird das Fehlerquadrat nur durch die wechselnde Lage der Fehlerhöchstwerte innerhalb der Sinuskurve beeinflusst. Die Vergrößerung kann keinesfalls den Wert 2 überschreiten.

Bei rechteckiger Belastung kann der Fehler durch Verkleinerung von ε unzulässig groß werden; man erhält, wenn das zulässige Fehlerquadrat Δ_{zul}^2 beträgt, für die kleinste zulässige Belastungsperiode

$$T_{I \text{ min}} = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\varepsilon \Delta_{\text{zul}}^2} T; \left(\frac{T_I}{T} \right)_{\text{min}} = \frac{1}{4\pi \varepsilon \Delta_{\text{zul}}^2}. \quad (6d)$$

Für $T = \frac{1}{50}$ Sek., $\Delta_{\text{zul}}^2 = \frac{1}{50}$, $\varepsilon = 0,25$ ergibt sich beispielsweise

$$T_I \geq \frac{1}{4\pi} 4 \cdot 50 \frac{1}{50} = \frac{1}{\pi} = 0,318 \text{ Sek.},$$

was weit unter den häufigsten Belastungsperioden liegt. Einem Fehlerquadrat Δ^2 entspricht eine Effektivwertabweichung $\delta = \sqrt{1 + \Delta^2} - 1$, was für $\Delta^2 = \frac{1}{50}$ etwa 1% ergibt.

Völlig vernachlässigbar sind die Temperaturspitzen zufolge dieser Effektivwertschwankung.

Alle diese Fehler werden durch das Rechnen mit effektiven Komponenten grundsätzlich nicht vermehrt, eine Kontrollrechnung in dieser Hinsicht ist praktisch entbehrlich.

4. Der Pendelungsfaktor.

Wie der Pendelungsstrom J_p aus einem gegebenen Belastungsdiagramm ermittelt wird, ist in Abb. 2 rechts gezeigt. Die Vektoren J_m , J_{eff} , J_p bilden ein rechtwinkeliges Dreieck, in dem der Winkel zwischen J_m und J_{eff} mit ζ bezeichnet ist. Der Winkel ζ

hat für den modulierten Einwellenstrom eine ähnliche Bedeutung wie der Winkel φ für den phasenverschobenen stationären Einwellenstrom. Wie der Wirkstrom von J_m dem $\cos \varphi$, der Blindstrom von J_m dem $\sin \varphi$, so ist der nur in einer Richtung Leistung übertragende mittlere Strom von J_{eff} dem $\cos \zeta$, der Pendelungsstrom von J_{eff} dem $\sin \zeta$ proportional. Der $\sin \zeta$ könnte entsprechend dem Blindleistungsfaktor $\sin \varphi$ als Pendelungsfaktor bezeichnet werden.

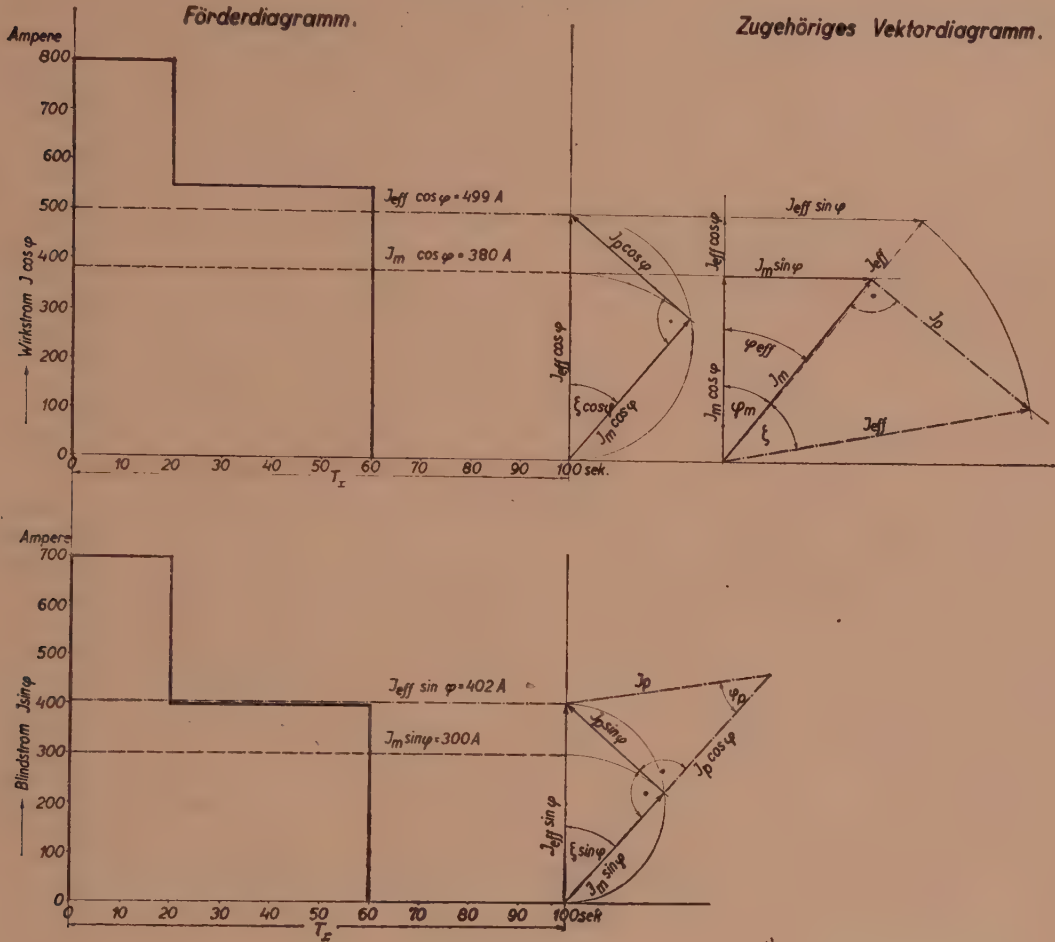


Abb. 2.

Unter Einführung des Winkels ζ kann Gl. (6a) in der Form geschrieben werden:

$$J_{\text{Ieff}} + J_{\text{IIeff}} = \sqrt{(J_{\text{Ieff}} \cos \zeta_{\text{I}} \cos \varphi_{\text{I}} + J_{\text{IIeff}} \cos \zeta_{\text{II}} \cos \varphi_{\text{II}})^2 + (J_{\text{Ieff}} \cos \zeta_{\text{I}} \sin \varphi_{\text{I}} + J_{\text{IIeff}} \cos \zeta_{\text{II}} \sin \varphi_{\text{II}})^2 + J_{\text{Ieff}}^2 \sin^2 \zeta_{\text{I}} + J_{\text{IIeff}}^2 \sin^2 \zeta_{\text{II}}} \quad (7)$$

oder

$$\begin{aligned}
 J_{\text{Ieff}} + J_{\text{IIeff}} &= \sqrt{J_{\text{Ieff}}^2 + J_{\text{IIeff}}^2 + 2 J_{\text{mI}} J_{\text{mII}} \cos (\varphi_{\text{I}} - \varphi_{\text{II}})} = \\
 &= \sqrt{J_{\text{Ieff}}^2 + J_{\text{IIeff}}^2 + 2 J_{\text{Ieff}} J_{\text{IIeff}} \cos (\varphi_{\text{I}} - \varphi_{\text{II}}) \cos \zeta_{\text{I}} \cos \zeta_{\text{II}}}.
 \end{aligned} \quad (7a)$$

Für zwei Ströme ruhiger Verbraucher hätte man erhalten:

$$J_{\text{Ieff}} + J_{\text{IIeff}} = \sqrt{J_{\text{I}}^2 + J_{\text{II}}^2 + 2 J_{\text{I}} J_{\text{II}} \cos (\varphi_{\text{I}} - \varphi_{\text{II}})}.$$

Aus dem Vergleich mit Gl. (7a) folgt, daß man bei der Zusammensetzung der effektiven Ströme zweier unruhiger Verbraucher das doppelte Produkt der beiden effektiven Ströme nicht nur mit dem $\cos(\varphi_I - \varphi_{II})$, sondern auch mit $\cos \zeta_I \cos \zeta_{II}$ zu multiplizieren hat.

Addiert man zwei Ströme so, als ob es sich um Effektivwerte von Belastungsströmen konstanter Amplitude handeln würde, so macht man einen Fehler

$$\Delta = \sqrt{J_{I\text{eff}}^2 + J_{II\text{eff}}^2 + 2 J_{I\text{eff}} J_{II\text{eff}} \cos(\varphi_I - \varphi_{II})} - \sqrt{J_{I\text{eff}}^2 + J_{II\text{eff}}^2 + 2 J_{I\text{eff}} J_{II\text{eff}} \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) \cos \zeta_I \cos \zeta_{II}}. \quad (7b)$$

Betrachtet man $\cos \zeta_{II}$ als Variable, so erreicht der Fehler sein Maximum für $\cos \zeta_{II} = 0$, also wenn der Verbraucher II innerhalb einer Periode ebensoviel Energie aufnimmt

wie er zurückgibt ($J_{mII} = 0$); er wird ein Minimum für $\cos \zeta_{II} = 1$. Sein absolutes Maximum erreicht er für $J_{I\text{eff}} = J_{II\text{eff}}$ und für $\cos(\varphi_I - \varphi_{II}) = 1$; $\cos \zeta_I = \cos \zeta_{II} = 0$; er beträgt $(\sqrt{2} - 1) = 41,4\%$.⁶ Sein absolutes Minimum, das ist den Wert Null, erreicht er für $\cos \zeta_I = \cos \zeta_{II} = 1$, also für zwei Verbraucher, die je einen stationären Strom aufnehmen ($J_{mI} = J_{effI}$; $J_{mII} = J_{effII}$; $J_{pI} = J_{pII} = 0$).

Abb. 3 zeigt die Addition zweier effektiver Ströme, die durch die Stromdreiecke $J_{m1} J_{eff1} J_{p1}$ und $J_{m2} J_{eff2} J_{p2}$ und die Phasenwinkel φ_{1m} und φ_{2m} gegeben sind. Der Übersichtlichkeit wegen sind die Stromdreiecke so angeordnet, daß der Winkel ζ rechts neben dem Winkel φ_m erscheint. Winkel $(\varphi_m + \zeta)$ hat nichts mit der Phasenverschiebung von J_{eff} gegenüber der Spannung zu tun, die φ_{eff} betragen würde und in Abb. 3 nicht vorkommt. Man kann sich den Winkel ζ am besten räumlich, aus

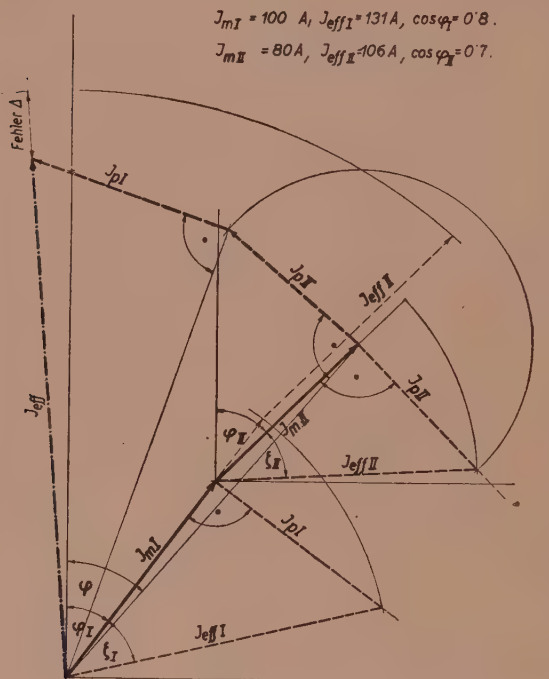


Abb. 3.

der Zeichenebene herausragend und nur für Additionszwecke nach den Gesetzen der darstellenden Geometrie in die Zeichenebene gedreht vorstellen. In Abb. 3 ist auch der Fehler Δ eingezeichnet, der sich bei geometrischer Addition der effektiven Ströme für $\cos \varphi_{m1} = \cos \varphi_{eff1}$ und $\cos \varphi_{m2} = \cos \varphi_{eff2}$ ergeben hätte.⁷

5. Zusammensetzung von drei und mehr modulierten Strömen.

Für drei Verbraucher erhält man:

$$J_{I\text{eff}} + J_{II\text{eff}} + J_{III\text{eff}} = \sqrt{J_{I\text{eff}}^2 + J_{II\text{eff}}^2 + J_{III\text{eff}}^2 + 2 J_{mI} J_{mII} \cos(\varphi_I - \varphi_{II}) + 2 J_{mII} J_{mIII} \cos(\varphi_{II} - \varphi_{III}) + 2 J_{mIII} J_{mI} \cos(\varphi_{III} - \varphi_I)}. \quad (8)$$

⁶ Was für die Kupferverluste und für die mittlere Endtemperatur ein Zuviel von 100% bedeutet.

⁷ Anwendungsbeispiele hiezu erscheinen demnächst in der E. u. M.

Für n Verbraucher erhält man analog:

$$\begin{aligned}
 J_{\text{I eff}} + J_{\text{II eff}} + \dots + J_{\text{n eff}} = & \sqrt{J_{\text{I eff}}^2 + J_{\text{II eff}}^2 + \dots + J_{\text{n eff}}^2 +} \\
 & + J_{\text{m I}} J_{\text{m II}} \cos (\varphi_{\text{I}} - \varphi_{\text{II}}) + J_{\text{m I}} J_{\text{m III}} \cos (\varphi_{\text{I}} - \varphi_{\text{III}}) + \\
 & + \dots + J_{\text{m I}} J_{\text{m n}} \cos (\varphi_{\text{I}} - \varphi_{\text{n}}) + \\
 & + J_{\text{m II}} J_{\text{m I}} \cos (\varphi_{\text{II}} - \varphi_{\text{I}}) + J_{\text{m II}} J_{\text{m III}} \cos (\varphi_{\text{II}} - \varphi_{\text{III}}) + \\
 & + \dots + J_{\text{m II}} J_{\text{m n}} \cos (\varphi_{\text{II}} - \varphi_{\text{n}}), \\
 & \dots \dots \dots \\
 & + J_{\text{m n}} J_{\text{m I}} \cos (\varphi_{\text{n}} - \varphi_{\text{I}}) + J_{\text{m n}} J_{\text{m II}} \cos (\varphi_{\text{n}} - \varphi_{\text{II}}) + \\
 & + \dots + J_{\text{m n}} J_{\text{m (n-1)}} \cos (\varphi_{\text{n}} - \varphi_{\text{n-1}}). \quad (8a)
 \end{aligned}$$

Bei drei Verbrauchern gelten ähnliche Einschränkungen wie für zwei Verbraucher. Beträgt das gemeinsame Integrationsintervall $m T_{\text{I}} = n T_{\text{II}} = o T_{\text{III}}$, so ist für genaue Einhaltung der Perioden T_{I} , T_{II} , T_{III} auszuschließen: $m = n = o$ (Synchronismus); die theoretisch gleichlaufenden Oberwellen dürfen nur bei einem der Verbraucher auftreten, so daß auch bei den Oberwellen der Gleichlauf vermieden wird. Werden die Belastungsperioden mit einer Duldung $\delta = 2 \dots 5\%$ eingehalten, so ist die Beschränkung der Oberwellen bestimmt durch

$$mn, no, om = \frac{T_{\text{I}} T_{\text{II}}}{\mu_{\text{II I}}}, \frac{T_{\text{II}} T_{\text{III}}}{\mu_{\text{III II}}}, \frac{T_{\text{III}} T_{\text{I}}}{\mu_{\text{I III}}} \geq \frac{1}{2 \delta} = 25 \dots 10. \quad (\text{Ungl. 8b})$$

Die Schwebungsperioden heißen jetzt $T_{\text{II-I}}$, $T_{\text{III-II}}$ und $T_{\text{I-III}}$; jetzt muß die Summe der drei längsten Perioden ≤ 10 Minuten sein, da drei Belastungsspitzen zusammenfallen können.

Für n Verbraucher gilt analog $mn, mo, mp \dots \geq \frac{1}{2 \delta} = 25 \dots 10$ und Summe der n längsten Perioden ≤ 10 Minuten.

Ist die zweite Bedingung nicht erfüllt, so muß wegen der Temperaturspitzen mit einem höheren effektiven Summenstrom gerechnet werden, den man etwa dadurch eingrenzen kann, daß man zunächst nur sovielen Verbraucher nach Gl. (8a) addiert, als der zweiten Bedingung genügen, die effektiven Ströme der übrigen aber ohne Berücksichtigung des Pendelungsstromes hinzufügt. Eine engere Eingrenzung muß der erwähnten weiteren Veröffentlichung vorbehalten bleiben.

Es ist bemerkenswert, daß die den Spitzenströmen entsprechenden Pendelungsströme unter allen Umständen rechtwinkelig hinzuzufügen sind; es kommt also nur auf den absoluten Wert der Spitzenströme, nicht aber auf deren gegenseitige Phasenlage an. Für den effektiven Summenstrom sind die induktiven Anlaufstromstöße eines Kurzschlußläufermotors und gleich große Wirkstromstöße, abgesehen von dem Anteil, den sie für den mittleren Strom liefern, völlig gleichwertig. Für den effektiven Summenstrom ist es auch gleichwertig, ob beispielsweise induktive Anlaufstromstöße zu einer Wirk- oder einer überwiegend induktiven Grundlast gleicher Größe hinzukommen, wenn die prozentuelle Einschaltdauer ε der Stromstöße so gering ist, daß die noch geringere Differenz der prozentuellen Zunahme der beiden mittleren Summenströme vernachlässigt werden kann. Exakt invariant ist der effektive Summenstrom einer reinen Pendelungsleistung (z. B. Pendelungen von Synchronmaschinen oder Kraftwerken) in bezug auf die Phasenlage der Grundbelastung, zu der sie hinzutritt.

6. Mehrwellenströme.

Mit effektiven Komponenten kann auch noch gerechnet werden, wenn es sich darum handelt, einen oder mehrere modulierte Einwellenströme zu einem modulierten Mehrwellenstrom zu addieren. Die Komponentenzerlegung ist bei einem modulierten

Mehrwellenstrom etwas anders als bei Einwellenströmen und soll daher abgeleitet werden. Die Gleichung der Stromkurve lautet:

$$i_m(\omega t) = i_{m1} \sin \omega t + i_{m3} \sin 3 \omega t + i_{m5} \sin 5 \omega t + \dots$$

Dieser Strom soll an Stelle des Einwellenstromes $i_m \sin \omega t$ der Gl. (6) moduliert werden; damit geht Gl. (6a) für $\cos \varphi_n = \cos \varphi_{p1} = \cos \varphi_{p2} = \dots = 1$ über in:

$$\begin{aligned} J_{\text{eff}} &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\int_0^T (i_{m1} + i_{p1} \sin \omega_1 t + i_{p2} \sin 2 \omega_1 t + \dots)^2 (\sin \omega t + \frac{i_{m3}}{i_{m1}} \sin 3 \omega t + \\ &\quad + \frac{i_{m5}}{i_{m1}} \sin 5 \omega t + \dots)^2 dt} = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\int_0^T (i_{m1}^2 + i_{p1}^2 \sin^2 \omega_1 t + \\ &\quad + i_{p2}^2 \sin^2 2 \omega_1 t + \dots) \cdot \left[\sin^2 \omega t + \left(\frac{i_{m3}}{i_{m1}} \right)^2 \sin^2 3 \omega t + \left(\frac{i_{m5}}{i_{m1}} \right)^2 \sin^2 5 \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \dots \right] dt} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{i_{m1}^2}{2} + \frac{i_{p1}^2 + i_{p2}^2 + \dots}{4} \right) \underbrace{\left[1 + \left(\frac{i_{m3}}{i_{m1}} \right)^2 + \left(\frac{i_{m5}}{i_{m1}} \right)^2 + \dots \right]}_{\frac{1}{v^2} = \frac{1}{\cos^2 \vartheta}}} = \\ &= \sqrt{\frac{i_{m1}^2}{2} + \left(\frac{i_{m3}^2}{2} + \frac{i_{m5}^2}{2} + \dots + \frac{1}{\cos^2 \vartheta} \frac{i_{p1}^2 + i_{p2}^2 + \dots}{4} \right)} = \\ J_{\text{eff}} &= \sqrt{J_{m1}^2 + (J_m^2 - J_{m1}^2 + J_p^2)} = \sqrt{J_m^2 \cos^2 \vartheta + (J_m^2 \sin^2 \vartheta + J_p^2)}; \end{aligned} \quad (9)$$

wobei bedeutet: $J_m^2 = J_{m1}^2 + J_{m3}^2 + J_{m5}^2 + \dots$; $J_{m1} = \sqrt{\frac{i_{m1}^2}{2}}$; $J_{mv} = \sqrt{\frac{i_{mv}^2}{2}}$;
 $J_p^2 = J_{p1}^2 + J_{p2}^2 + J_{p3}^2 + \dots$; $J_{p1} = \frac{1}{\cos \vartheta} \sqrt{\frac{i_{p1}^2}{4}}$; $J_{pv} = \frac{1}{\cos \vartheta} \sqrt{\frac{i_{pv}^2}{4}}$;
 $\frac{1}{\cos^2 \vartheta} = 1 + \left(\frac{i_{m3}}{i_{m1}} \right)^2 + \left(\frac{i_{m5}}{i_{m1}} \right)^2 + \dots$; $v = \cos \vartheta = \frac{J_{m1}}{J_m}$

Wie ersichtlich, ist der Formfaktor $\cos \vartheta$ anders bezogen als der Formfaktor $\cos \zeta$. J_m und J_p können aus dem Diagramm der Effektivströme, wie im Kapitel 1 gezeigt, bestimmt werden. Der mittlere Strom J_m ist nochmals in zwei Komponenten, die Grundharmonische $J_{m1} = J_m \cos \vartheta$ und in den Verzerrungsstrom $J_m \sin \vartheta$ zu zerlegen. $J_m \sin \vartheta$ ist wie ein Pendelungsstrom zu behandeln und kann als netzfrequenter Modulationsstrom bezeichnet werden. $\cos \vartheta = \frac{J_{m1}}{J_m}$ kann meist aus den Schildangaben der Stromrichter und deren Transformatoren abgelesen werden.

Heißt der $\sin \varphi$ Blindleistungsfaktor und der $\sin \zeta$ Pendelungsfaktor, so kann der $\sin \vartheta$ sinngemäß als Verzerrungsfaktor bezeichnet werden.

Nehmen mehrere Verbraucher Mehrwellenströme auf, so können sie nur dann mit Hilfe der effektiven Komponenten addiert werden, wenn alle Mehrwellenströme entweder in Kurvenform und Phase übereinstimmen oder wenn sie keine gemeinsamen Oberwellen haben.

Der erste Fall gehört gar nicht hierher. Er tritt nur bei Parallelarbeit gleichartiger Verbraucher, z. B. von Gleichrichtern gleicher Bauart auf, die proportionale Ströme gleicher Phase und gleichen Verlaufes aufnehmen und daher algebraisch zu addieren sind. Für die Komponentenzerlegung stellen sie einen einzigen Verbraucher entsprechend größerer Stromaufnahme dar.

Der zweite Fall gehört wohl hierher, ist aber höchst unwahrscheinlich. Die allgemeine Additionsbedingung lautete: $i_p(vn)_I$ oder $i_p(vm)_{II} = 0$, wenn $m T_I = n T_{II}$

ist. Auf den Verzerrungsstrom angewendet, müßte sie lauten: $i_{m\nu I}$ oder $i_{m\nu II} = 0$, weil $T_I = T_{II} = \frac{1}{\omega}$ ist; außerdem müßte $\nu = 1$ ausgeschlossen werden, da es nicht zum Verzerrungsstrom gehört. Die beiden Verzerrungskurven müßten also so beschaffen sein, daß jede Oberwelle, die in der einen Kurve vorkommt, in der anderen nicht enthalten ist, was praktisch kaum vorkommen dürfte.

Daß mehr als ein Verzerrungsstrom (netzfrequenter Modulationsstrom) mit Hilfe der effektiven Komponenten zu Pendelungsströmen nicht addiert werden kann, liegt vor allem daran, daß der Verzerrungsstrom, der an die Netzfrequenz gebunden ist, etwa grundsätzlich anderes darstellt als der Pendelungs- oder Modulationsstrom, der an die Netzfrequenz nicht gebunden ist und ihr gegenüber womöglich teilerfremd sein soll.

7. Erweiterung des Begriffes der Scheinleistung.

Die Scheinleistung ist in den neueren Lehrbüchern für Wechselstromtechnik⁸ meist definiert als

$$N_s = N_w^2 + N_b^2 + N_v^2, \quad (10)$$

wobei N_w die Wirkleistung, N_b die Blindleistung,

$$N_v^2 = k, \lambda \sum_{k \neq \lambda}^{\infty} (P_k^2 J_{\lambda}^2 + P_{\lambda}^2 J_k^2 - P_k P_{\lambda} J_k J_{\lambda} \cos [\varphi_k - \varphi_{\lambda}]) \quad (10a)$$

die Verzerrungsleistung⁸ bedeutet;⁹ k und λ bedeuten zwei verschiedene ganze Zahlen, die nacheinander alle Werte von 1 bis ∞ durchlaufen können.

Für den Fall einer sinusförmigen Netzspannung, der bisher allein betrachtet worden ist, reduziert sich die Verzerrungsleistung auf

$$N_v^2 = P_1^2 \lambda \sum_2^{\infty} J_{\lambda}^2.$$

Für den Pendelungsstrom wurde gefunden

$$J_p^2 = J_{p1}^2 + J_{p2}^2 + \dots = \lambda \sum_1^{\infty} J_{p\lambda}^2; \text{ daher } N_p^2 = P_1^2 \lambda \sum_1^{\infty} J_{p\lambda}.$$

Da der Pendelungsstrom nur eine hin- und hergehende Leistung überträgt, ist die Pendelungsleistung N_p eine Scheinleistung ähnlich wie N_v . Formal unterscheiden sich die beiden Ausdrücke nur dadurch, daß die Σ des Verzerrungsstromes von $2 \dots \infty$, die Σ des Pendelungsstromes aber von $1 \dots \infty$ zu erstrecken ist; wesentlicher ist der bereits erwähnte Unterschied, daß die Frequenzen des Verzerrungsstromes Oberwellen der Netzfrequenz sind, während die Frequenzen des Pendelungsstromes womöglich teilerfremd gegenüber der Netzfrequenz sein sollen, eine Bedingung, die durch die Ungenauigkeit der Einhaltung der Modulationsperioden praktisch fast immer erfüllt ist. Eine Folge dieses Unterschiedes ist es dann, daß in der Σ die 2., 4., 8. . . ., bei Drehstrom auch die 3., 9. usw. Oberwelle beim Verzerrungsstrom nicht vorkommen, beim Pendelungsstrom aber, bei dem diese Oberwellen auf die Modulationsperiode zu beziehen sind, nicht nur auftreten, sondern sogar seine größten harmonischen Komponenten bilden können. Eine andere wichtige Folge dieses Unterschiedes ist, daß die teilerfremden Oberwellen verschiedener Pendelungs-

⁸ Vgl. beispielsweise Fraenckel: Theorie der Wechselströme, S. 85. 1930.

⁹ C. Budeanu: Vgl. Elektrotechn. Z. H. 3 (1928).

ströme unter 90° , die synchron laufenden Oberwellen der Netzfrequenz aber phasenrichtig addiert werden müssen. Schließlich ist $J_p = \frac{i_p}{2}$, $J_{(m)k}$ aber gleich $\frac{i_{(m)k}}{\sqrt{2}}$.

Für einen modulierten Gleichstrom nach Gl. (1) gibt es übrigens außer der Pendelungsleistung noch eine zusätzliche Verzerrungsleistung, wenn auch die Spannung moduliert wird, z. B. nach der Gleichung

$$p = p_m + v \sum_1^\infty p_v \sin(v \omega t + v \varphi_p v), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} N_{\text{eff}}^2 &= k \sum_1^\infty P_k^2 J_k^2 (\cos^2 \varphi_k + \sin^2 \varphi_k) + k \lambda \sum_1^\infty [P_k^2 J_v^2 + P_v^2 J_k^2 + \\ &\quad - 2 P_k P_\lambda J_k J_\lambda \cos(\varphi_k - \varphi_\lambda)] = \\ &= \underbrace{\left(P_m^2 + k \sum_1^\infty P_{pk}^2 \right)}_{\text{effektive Spannung}} \underbrace{\left[J_m^2 + k \sum_1^\infty J_{pk}^2 (\cos^2 \varphi_k + \sin^2 \varphi_k) \right]}_{\text{effektiver Strom}} + \\ &\quad + \underbrace{k \lambda \sum_1^\infty [P_{pk}^2 J_{p\lambda}^2 + P_{p\lambda}^2 J_{pk}^2 - 2 P_{pk} P_{p\lambda} J_{pk} J_{p\lambda} \cos(\varphi_{pk} - \varphi_{p\lambda})]}_{\text{Verzerrungsleistung der Modulationen } N_{pv}^2 \text{ oder auch Pendelungsverzerrungsleistung}}, \\ N_{\text{eff}}^2 &= \underbrace{P_m^2 J_m^2}_{\text{Gleichstrom-wirkleistung}} + \underbrace{P_m^2 k \sum_1^\infty J_{pk}^2 + k \sum_1^\infty P_{pk}^2 \left(J_m^2 + k \sum_1^\infty J_{pk}^2 \cos^2 \varphi_k \right)}_{\text{Pendelungswirkleistung}} + \\ &\quad + \underbrace{k \sum_1^\infty P_{pk}^2 J_{pk}^2 \sin^2 \varphi_k}_{\text{Pendelungsblindleistung}} + N_{pv}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

Eine effektive Gleichstromleistung kann zerlegt werden in eine Gleichstromwirkleistung, eine Pendelungswirk-, eine Pendelungsblindleistung und eine Pendelungsverzerrungsleistung. Für konstante Spannung ($P_{pk} = 0$) wird die Verzerrungsleistung 0, weshalb das Rechnen mit effektiven Stromkomponenten nur bei stationärer Netzspannung (P_m) genau richtig ist. Gerade bei Gleichspannungsantrieben wird jedoch die Spannung mitunter moduliert, z. B. bei Leonardsteuerungen von Fördermaschinen, Walzwerken, Scheren, Hobelmaschinen usw. Sind die Induktivitäten des Gleichstromkreises vernachlässigbar gering, so wird $\varphi_{pk} = \varphi_{p\lambda} = 0$, die Pendelungsblindleistung wird 0 und die Verzerrungsleistung erreicht ihr Maximum

$$N_{pv}^2 = k, \lambda \sum_1^\infty (P_{pk} J_{p\lambda} - P_{p\lambda} J_{pk})^2. \quad (12a)$$

Für eine sinusförmige Spannungsmodulation reduziert sich Gl. (12) auf

$$\begin{aligned} N_{\text{eff}1}^2 &= P_m^2 J_m^2 + P_m^2 k \sum_1^\infty J_{pk}^2 + P_{p1}^2 (J_m^2 + J_{p1}^2 \cos^2 \varphi_1 + J_{p1}^2 \sin^2 \varphi) + \\ &\quad + P_{p1}^2 k \sum_2^\infty J_{pk}^2, \end{aligned} \quad (12b)$$

die übergeht in die bekannte Gleichung für verzerrte Ströme an Einwellenspannung, wenn $P_m = 0$; $J_m = 0$ gesetzt wird:

$$N_{\text{eff}}^2 = P_1^2 \left(J_1^2 \cos^2 \varphi_1 + J_1^2 \sin^2 \varphi_1 + k \sum_2^\infty J_k^2 \right). \quad (12c)$$

Gl. (12) lehrt, daß bei modulierter Gleichspannung die Gleichstromwirkleistung nicht nur um die Pendelungswirk- und Pendelungsblindleistung zu vermehren ist, was durch das gebräuchliche Rechnen mit effektiven Strömen zumeist geschieht, sondern auch um die Verzerrungsscheinleistung, die desto größer ist, je mehr die Modulationsspannung und der Pendelungsstrom von der Sinusform abweichen. Hierdurch wird der Wirkungsgrad von rechteckigen Steuerungskurven verschlechtert. Da Zusammensetzungen von mehreren modulierten Strömen an modulierten Gleichspannungen betriebsmäßig sehr selten vorkommen, mag dieser kurze Hinweis genügen.

Für Wechselspannung gilt eine der Gl. (12) analoge Gleichung. Es kann daher die Scheinleistung eines modulierten Mehrwellenstromes an modulierter Spannung aufgespalten werden in

$$N_{\text{eff}}^2 = N_{mw}^2 + N_{mb}^2 + N_{pw}^2 + N_{pb}^2 + N_{pv}^2 + N_v^2; \quad (12d)$$

also in eine mittlere Wirkleistung,	die allein zur Übertragung der ganzen Leistung genügen würde und der Anzeige eines Wirkleistungszählers ohne Rücklaufhemmung entspricht;
eine mittlere Blindleistung,	die der Anzeige eines Blindleistungszählers ohne Rücklaufhemmung entspricht;
eine Pendelungswirkleistung,	Bestimmung durch Wirkleistungsschreiber;
eine Pendelungsblindleistung von Netzfrequenz,	Bestimmung durch Blindleistungsschreiber;
eine Pendelungsblindleistung von Modulationsfrequenz, ¹⁰	meist uninteressant; müßte bei Wechselspannung durch Wirk- und Blindleistungsschreiber, Strom- und Spannungsschreiber bestimmt werden;
eine Verzerrungsleistung der Oberwellen von Modulationsfrequenz,	
eine Verzerrungsleistung der Oberwellen von Netzfrequenz,	Bestimmung durch Oszillograph mit zwei Meßschleifen.

Modulierte Wechselspannungen in Wechselstromnetzen kommen fast nur im Störfall vor. Hierher gehören vor allem die Pendelungen von Synchronmaschinen, hervorgerufen durch ungleichförmigen Antrieb, durch Mängel am Leistungs- oder am Spannungsregler oder durch negative Dämpfung. Hingegen treten in den Verbindungsleitungen zwischen Stromerzeugern mit ungleichförmigem Antriebsdrehmoment, also beispielsweise bei Dieselmotorantrieb oder Antrieb durch Riemen mit deutlich schlagender Naht modulierte Wechselspannungen betriebsmäßig auf, die sich für die Verbraucher im Netz nicht bemerkbar machen. Über diese (inneren) Pendelungsströme besteht eine umfangreiche Literatur. Im Rahmen dieses Aufsatzes sei nur erwähnt, daß die Modulationsspannung bei vernachlässigbarer Größe der mittleren Leistung der Verbindungsleitung hier etwa senkrecht zur elektromotorischen Kraft der beiden gegeneinander schwingenden Generatoren steht, wie in Abb. 4 angedeutet. Die Ströme zufolge dieser Modulationsspannung, die sich von Generator zu Generator schließen, sind infolge Überwiegens der Generatorstreuwiderstände um etwa 90° nachteilig. Die Modulationsspannung kann jedoch nicht direkt gemessen werden, sondern nur die Klemmen- oder Netzspannung. Auf diese bezogen, ergeben die überwiegenden Modulationsblindströme eine beträchtliche Wirkleistung, während

¹⁰ Diese Pendelungsblindleistung ist bei Wechselspannung vernachlässigbar, weil die Phasenverschiebung für die Modulationsspannung $\frac{1}{4}$ Netzperiode nicht überschreiten kann, die Netzperiode aber nur einen kleinen Bruchteil der Modulationsperiode beträgt.

die Blindleistung gering, theoretisch sogar kapazitiv ist. Die inneren Pendelungsströme sind also überwiegend Wirkströme, die durch die Generatorleistungsmesser nachgewiesen werden können.

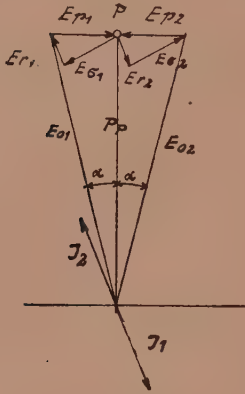


Abb. 4.

E_{01}, E_{02} = vom Hauptfeld erregte elektromotorische Kräfte, E_{r1}, E_{r2} = ohmsche Spannungen, E_{p1}, E_{p2} = Pendelspannungen, $E_{\sigma 1}, E_{\sigma 2}$ = Streuspannungen, P_p = Klemmenspannungen im Punkt P, J_1, J_2 = Pendelungsströme der leerlaufenden Generatoren.

Solange der Pendelungsausschlag 2α klein ist, ist die Klemmenspannung $\overline{P_p} = E_{01} \cos \alpha$ praktisch gleich E_{01} ; die betriebsmäßigen inneren Pendelungsströme beeinflussen das Netz praktisch nicht und sollen nicht einmal ein Lichtflimmern zur Folge haben. Im Störungsfalle aber, wenn $\alpha > \text{etwa } 10^\circ$ ist, bewirkt die innere Modulationsspannung merkliche Spannungsschwankungen, die wir in Wien in letzter Zeit öfters kennenzulernen Gelegenheit hatten. Für zwei gleich große, gegeneinander pendelnde Turbogeneratoren vermindert sich die Leerlaufklemmenspannung, die im Punkt P gemessen wird, zu $\overline{P_p} = E_{01} \cos \alpha = E_{01} \sqrt{1 - \sin^2}$; das Spannungsdiagramm Abb. 4 lautet:

$$p_P \sin \omega t = e_{01} \sin (\omega t + \alpha) + \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) [e_{p11} \sin (\omega_I t + \varphi_1) + e_{p12} \sin 2 (\omega_I t + \varphi_2) + \dots].$$

Die Gleichung der Klemmeneffektivspannung lautet daher:

$$\overline{P_p^2} = E_{01}^2 - [\overline{E_{p11}}^2 \sin^2 (\omega_I t + \varphi_1) + \overline{E_{p12}}^2 \sin^2 2 (\omega_I t + \varphi_2) + \dots],$$

so daß die effektive Klemmenspannung beträgt:

$$P_{P \text{ eff}}^2 = E_{01}^2 - \nu \sum_1^n E_{p1\nu}^2, \text{ wenn } E_{p1\nu} = \frac{\overline{E_{p1\nu}}}{\sqrt{2}} = \frac{e_{p1\nu}}{2} \quad (12e)$$

bedeutet.

Die Gleichung der modulierten Pendelspannung lautet:

$$e_{p1} = [e_{p11} \sin (\omega_I t + \varphi_1) + e_{p12} \sin 2 (\omega_I t + \varphi_2) + \dots] \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right);$$

die Pendeffectivspannung beträgt daher

$$E_{p1} = \overline{E_{p11}} \sin (\omega_I t + \varphi_1) + \overline{E_{p12}} \sin 2 (\omega_I t + \varphi_2) + \dots;$$

sie eilt der Klemmenspannung $\overline{P_p}$ um 90° in der Netzphase nach. Wenn die zeitliche Veränderung des Vektors E_{p1} zu keiner Änderung der Winkelgeschwindigkeit ω des Vektors $\overline{P_p}$ führt, was allerdings nur für völlig symmetrische Verhältnisse exakt zutreffen kann, so setzt sich die modulierte Pendelspannung e_{p1} mit der effektiven Klemmenspannung $P_{p \text{ eff}}$ genau so zusammen wie der Pendelungsstrom mit dem mittleren Strom. Um daher unter dieser Voraussetzung die mittlere Klemmenspannung zu finden, muß E_{p1} nochmals von $P_{P \text{ eff}}$ rechtwinkelig subtrahiert werden:

$$P_{Pm}^2 = E_{01}^2 \left(1 - \frac{1}{E_{01}^2} \nu \sum_1^n E_{p1\nu}^2 \right)^2;$$

daraus ergibt sich die Modulationsspannung für das Netz zu:

$$P_p^2 = P_{P \text{ eff}}^2 - P_{Pm}^2 = \nu \sum_1^n E_{p1\nu}^2 - \frac{1}{E_{01}^2} \left(\nu \sum_1^n E_{p1\nu}^2 \right)^2. \quad (12f)$$

Diese Modulationsspannung ist in Phase mit der Netzspannung. Sie steht als Pendelspannung senkrecht auf der Klemmenspannung P_p und als Modulationsspannung

nochmals senkrecht auf P_{Pm} und kann daher als Modulationsspannung zweiter Ordnung aufgefaßt werden.

Gl. (12e) muß der geometrischen Beziehung genügen:

$$P_P^2 = E_{01}^2 (1 - \sin^2 \alpha), \text{ so daß } \sin^2 \alpha_{\text{eff}} = \frac{1}{E_{01}^2} \nu \sum_1^n E_{p1\nu}^2 \sin \nu (\omega t + \varphi_\nu) = 1 - \frac{P_{P\text{eff}}^2}{E_{01}^2}. \quad (12g)$$

Bezeichnet man die meßbare effektive Spannungsabsenkung $\frac{P_{P\text{eff}}}{E_{01}}$ mit δ , so erhält man die einfache Beziehung

$$\sin^2 \alpha_{\text{eff}} = 1 - \delta^2, \text{ wobei } \sin \alpha_{\text{max}} \doteq \sin \alpha_{\text{eff}} / \sqrt{2} \quad (12h)$$

gesetzt werden kann, wenn der zeitliche Verlauf des Pendelmomentes oder der Verlauf der Pendelspannung nicht gegeben ist.

Mit Hilfe der Gl. (12e) u. (12f) sind folgende Werte der Gl. (12) gefunden worden:

$$P_m = E_{01}; \quad P_{pk} = E_{p1\nu}.$$

Gl. (12) kann angewendet werden, wenn die Belastung entweder als stationär oder als asynchron gegenüber der Modulationsspannung betrachtet werden kann. Synchronismus muß hier schon wegen der mechanischen Resonanz ausscheiden. Die Rechnung ergibt dann eine ähnliche Erweiterung der Komponentenzerlegung wie im Kapitel 6 für Mehrwellenstrom gezeigt worden ist.

Eine merkliche Spannungsabsenkung kommt jedoch, wie erwähnt, bei Wechselstromnetzen betriebsmäßig sehr selten vor, die Verzerrungsleistung N_{pv} wird daher bei Wechselspannung meist, N_{mv} und N_v bei modulierter Gleichspannung immer außer Betracht bleiben können. Bezeichnet man das Verhältnis der gesamten Scheinleistung zur Wirkleistung als Leistungsfaktor k_w , so ist dieser allgemein definiert als

$$k_w = \sqrt{\frac{N_{mw}^2 + N_{mb}^2 + N_{pw}^2 + N_{pb}^2(\omega) + (N_{pb}^2(\omega_I) + N_{pv}^2) + N_v^2}{N_{mw}^2}}. \quad (12i)$$

Damit ist der gebräuchliche Ausdruck für die Scheinleistung und den Leistungsfaktor um die drei neuen Begriffe Pendelungswirk-, Pendelungsblind- und Pendelungsverzerrungsleistung erweitert und der Zusammenhang des Pendelungsstromes und der Pendelungsleistung des Additionstheorems mit dem allgemeineren Fall der Leistungs-pendelungen von Synchronmaschinen hergestellt.

8. Zusammensetzung von unperiodisch modulierten Einwellen- und Gleichströmen.

Aus der Ableitung der Gl. (4)

$$\begin{aligned} J_{\text{eff}}^2 &= (i_{mI} + i_{mII})^2 + \frac{i_{p1I}^2 + i_{p2I}^2 + \dots}{2} + \frac{i_{p1II}^2 + i_{p2II}^2 + \dots}{2} = \\ &= (J_{mI} + J_{mII})^2 + J_{pI}^2 + J_{pII}^2, \end{aligned}$$

in der die Periodenzahl nicht mehr vorkommt, ging hervor, daß sämtliche Wellen nach dieser Gleichung unter 90° zusammengesetzt werden; nur gleichlaufende Wellen waren auszuschließen. Diese Einschränkung wurde für periodische Verbraucher abgeschwächt durch die ungenaue Einhaltung der Belastungsperiode. In höherem Maße wird sie für Verbraucher abgeschwächt, deren wiederkehrende Belastung sowohl nach Dauer als nach Höhe erheblich schwankt (quasiperiodische Verbraucher). Diese Gruppe möge für δ Werte von 5...50% umfassen. Bei und über 50% Duldung gibt es keine praktisch gleichlaufenden Oberwellen mehr. Es gibt also auch keine gleichlaufenden Oberwellen, wenn die unregelmäßigen Ungleichheiten der wiederkehrenden Belastungen so groß sind, daß von Perioden gar nicht mehr gesprochen werden kann.

Wesentlich ist nur, daß die Ungleichheiten ungeregelt sind; denn wären sie geregelt, z. B. durch ein vorgeschriebenes Walzprogramm, so bestimmt die Regelung eine überlagerte Modulationskurve, die von so langer Dauer sein kann, daß die Duldung δ gering und gleichlaufende Oberwellen zu berücksichtigen, also die Regelkurven punktweise zu addieren sind. Die Gl. (4) gilt also nur für eine regellose Unordnung exakt, die bei zahlreichen unruhigen Verbrauchern gleicher Größenordnung verhältnismäßig häufig auftritt.

Für derartige Verbraucher gestattet Gl. (4) die Berechnung von Kupferverlusten, mittleren Spannungsabfällen und Wirkungsgraden so genau, wie es eben möglich ist, J_{mI} , J_{mII} und J_{effI} , J_{effII} zu bestimmen. Wo der mittlere Strom durch Strom- oder bei konstanter Spannung durch Leistungszähler, der effektive Strom aber durch J^2 -Zähler exakt gemessen wird, kann mit sehr großer Genauigkeit gerechnet werden. Bei regelloser Unordnung sind auch keinerlei Temperaturspitzen zu befürchten, die Gl. (4) und (6a) können also auch zur Erwärmungskontrolle dienen.

Weniger einfach ist es zu entscheiden, inwieweit sie verwendet werden dürfen, wenn überlagerte Modulationskurven vorliegen. Darüber muß wieder auf die erwähnte Veröffentlichung¹¹ verwiesen werden. Wenn keine Zusammensetzung mit einem anderen periodischen oder unperiodischen Verbraucher beabsichtigt ist, können die Kupferverluste eines unperiodischen Verbrauchers übrigens für jeden beliebigen Verlauf durch Berechnung des effektiven Stromes genau ermittelt werden. Dementsprechend konnte im vorigen Kapitel die Pendelungsleistung von Walzwerken ohne jede Einschränkung als Beispiel für Gl. (12) angeführt werden.

Eines der wichtigsten und häufigsten Anwendungsgebiete der effektiven Komponenten ist der Fall, daß ein periodischer Verbraucher an ein unperiodisch belastetes Netz mit verhältnismäßig geringem Pendelungsstrom angeschlossen werden soll. Durch das Hinzutreten der ruhigeren Netzbelastung nimmt der Pendelungsstrom des Verbrauchers bedeutend weniger zu als sein stationärer oder mittlerer Strom. Die auf den effektiven Strom bezogenen Schwankungen des Summenstromes werden so viel geringer, daß sogar eine beträchtliche Überschreitung der Bedingung $T < 10$ Minuten zulässig ist. Da Synchronismus und lange dauernde Schwebungen nennenswerter Amplitude auch nicht auftreten können, besteht hier praktisch keine Anwendungsbeschränkung.

Zusammenfassung.

Mit Hilfe des Begriffes Pendelungsstrom können die Effektivwerte von beliebig modulierten Belastungsströmen in ähnlicher Weise exakt zusammengesetzt werden wie die phasenverschobenen stationären Wechselströme mit Hilfe des Begriffes Blindstrom. Ist die gegenseitige Lage der beiden Belastungskurven eindeutig gegeben, so ist auch der effektive Summenstrom eindeutig bestimmt. Bei unperiodischen Verbrauchern ist man immer genötigt, einen mittleren Belastungsverlauf und eine mittlere oder ungünstigste gegenseitige Phasenlage zugrunde zu legen, mit welchen Werten dann exakt addiert werden kann. Bei periodischen Verbrauchern mit der Periodentoleranz $\pm \delta$ bewirkt die Gl. (4) bereits eine richtige Mittelwertbestimmung, wenn das kleinste gemeinsame Vielfache der Belastungsperioden, also

$$\frac{T_I T_{II}}{\mu} \geq \frac{1}{2\delta} \text{ ist.}$$

Für den Fall, daß der effektive Summenstrom nicht nur zur Bestimmung von Kupferverlusten und Wirkungsgrad, sondern auch zur Erwärmungskontrolle dienen soll, gibt die Erfüllung der Faustformel $T_{\max n} = \text{Summe der } n \text{ längsten Perioden und Schwebungsperioden} < 10 \text{ Minuten}$ für periodische Verbraucher die Gewähr,

¹¹ Zulässigkeitsgrenzen für das Rechnen mit effektiven Komponenten.

daß eine unzulässige Temperaturspitze nicht möglich ist. Wird die Faustformel nicht erfüllt, so bedeutet das noch nicht, daß die im Endzustande auftretenden Temperaturspitzen unzulässig sind. Es ist vielmehr eine genauere Untersuchung notwendig, über die der in Vorbereitung befindliche, mehrfach erwähnte Aufsatz¹² nähere Angaben enthält.

Der Begriff der Scheinleistung wird durch den Begriff der Pendelungsleistung erweitert. Zu der gründlich durchgearbeiteten Theorie der stationären Wechselströme, die mit der Netzspannung synchron laufen, treten die Grundzüge einer Theorie der Modulations- oder Pendelungsströme, die untereinander und gegenüber der Netzspannung asynchron verlaufen. Diese Theorie schließt den Fall des modulierten Gleichstromes ($\omega \rightarrow 0$) mit ein.

(Eingegangen am 14. Februar 1946.)

Der beschleunigte Aufstieg eines Strahlflugkörpers.

Von A. Pröll, Bad Gastein.

Mit 3 Textabbildungen.

Die stets zunehmende Bedeutung des Stratosphärenfluges und die Verwendung von Raketen- und Strahltriebwerken zum Antrieb der dazu gehörenden Flugzeuge rechtfertigt eine kurze Betrachtung über die einfachsten Betriebsverhältnisse, d. i. für den Aufstieg und Weiterflug in der Stratosphäre. Es interessiert dabei vornehmlich die unter verschiedenen Bedingungen (zulässige Beschleunigung, Geschwindigkeitsmaximum, Steigwinkel, Reichweite usw.) erforderliche Kraftstoffmenge, die zu Anfang vorhanden sein muß, und es liegt nahe zu fragen, wie der Betrieb eingerichtet werden soll, damit die Forderung, daß das Massenverhältnis $\frac{m_0}{m}$ der Anfangs- zur Endmasse des Flugzeugs möglichst klein sei (bezogen auf eine zurückgelegte Strecke), am besten erfüllt ist.

Es ist weiter naheliegend anzunehmen, daß die Aufgabe, mit möglichst kleinem Kraftstoffverbrauch eine bestimmte Höhe bzw. Strecke zu erreichen, auf kleine Flug-Geschwindigkeiten v führt [man könnte dies schon aus den Beziehungen nach Gl. (9a und 10) schließen, die für den luftleeren Raum gelten]. Ein eigentliches Minimalproblem würde dann nicht vorliegen, sondern nur eine monotone Abnahme des Massenverbrauches für gegebene Strecke.

Diese Schlußfolgerung ist jedoch — wie die folgenden Ausführungen zeigen werden — nicht zutreffend: bei verschiedenen Betriebsarten gibt es tatsächlich optimale Werte beim Anfahren, d. i. während des beschleunigten Anfangszustandes des Fluges; dies ist besonders durch den Einfluß des Luftwiderstandes stärker bedingt. Allerdings sind auch dann noch die Unterschiede in den festgestellten Massenverbrauchsverhältnissen recht gering (vgl. S. 187), sofern die erzielte Geschwindigkeit bis zum Ende der gegebenen Strecke in allen Fällen gleichgehalten wird. Umgekehrt ergeben sich bei gleichgehaltenem Massenverbrauch nicht unerheblich verschiedene Endgeschwindigkeiten. Und da diese Geschwindigkeiten mit Rücksicht auf den weiteren gleichförmigen Flug besonders maßgebend sind, ist auch die Bewertung der einzelnen Betriebsarten auf der zuletzt besprochenen Basis aufschlußreich und wichtig.

Die Reaktionsgeschwindigkeit.

Die Beurteilung und Regelung des Betriebes geschieht dabei naturgemäß am besten durch Drosselung der sekundlichen Massenabgabe $\frac{dm}{dt}$, wobei die Strahl-Reaktions-

¹² Zulässigkeitsgrenzen für das Rechnen mit effektiven Komponenten.

geschwindigkeit w im allgemeinen auch noch wegen der Druckänderung mit der Höhe veränderlich ist. Im folgenden möge aber zunächst diese Änderung nicht berücksichtigt werden (was ja auch durch entsprechende Einstellung des Innendrucks p_1 bzw. der Verbrennungstemperatur T_1 im Strahlgefäß erreicht werden kann). Die augenblicklichen Betriebsverhältnisse werden dann nur durch den momentanen Wert von $\frac{dm}{dt}$ gekennzeichnet sein.

Diese Annahme bedeutet natürlich eine gewisse Beschränkung der Gültigkeit der weiterhin aufgestellten Rechnungen. Indessen ist dazu zu bemerken: Die Ausstrahlgeschwindigkeit aus einer Lavaldüse aus einem Raum mit der Gastemperatur T_1 und Druck p_1 nach der freien Atmosphäre hinaus auf T_2 und p_2 erfolgt nach der bekannten Formel von De Saint Venant und Wantzel

$$w = w_{\max} \sqrt{1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}} \quad (1)$$

Darnach würde zur Erzeugung von

$$w_{\max} = \sqrt{\frac{p_1}{\rho_1} \frac{2\kappa}{\kappa-1}} = \sqrt{R T_1 \frac{2\kappa}{\kappa-1}} = 2500 \text{ m/s} \quad (2)$$

gegen $p_2 = 0$ eine Verbrennungstemperatur von etwa 3000° erforderlich sein (oder ein Druck p_1 von rund $100\,000 \text{ kg/m}^2$). Soll nun die Abhängigkeit von der äußeren Dichte und Temperatur berücksichtigt werden, so bedeutet dies in allen Gleichungen, in denen etwa die Höhe (oder die Wegstrecke s) veränderlich ist, eine nicht unwesentliche Komplikation in der Rechnung, wie dies an einem Beispiel (S. 180) gezeigt wird.

Das Problem ist in vereinfachter Form schon von Lorenz² behandelt worden (ohne den Aufstieg); Lorenz hat auch in einer weiteren Arbeit³ den Aufstieg in sehr große Höhen (ohne Luftwiderstand) berührt und unter der Annahme konstanter Beschleunigung berechnet, wobei er die Bemerkung hinzufügt, daß der (naheliegende) Gedanke, die Variationsrechnung zur Lösung der oben gestellten Aufgabe heranzuziehen, hier versagt.

Im folgenden wird versucht werden, an Hand eines Zahlenbeispiels, dem die zur Zeit etwa üblichen und gewünschten Daten zugrunde liegen, durch Vergleich verschiedener Betriebszustände der besten Lösung nahezukommen.

Es soll weiter vorausgesetzt werden, daß nirgends — auch nicht lokal — die Schallgeschwindigkeit überschritten wird. Mit Rücksicht auf deren Abnahme in großer Höhe ist daher v_{\max} auf 290 m/s zu beschränken. Damit ist also eine weitgehende Einschränkung ausgesprochen und die Untersuchung auf „kleinräumige“ Verhältnisse zugeschnitten, die zunächst wohl eine unmittelbare Extrapolation auf Raketenflüge mit Überschallgeschwindigkeit und Reichweiten von mehreren 1000 km nicht gestatten. Immerhin können die Ergebnisse der folgenden Rechnungen tendenzmäßig richtunggebend für solche weiter gespannte Anwendungsgebiete werden.

Eine weitere Einschränkung bedeutet die hier zu treffende Annahme, daß der Neigungswinkel γ konstant gehalten werden soll. Dies bringt eine erhebliche Vereinfachung mit sich, gestattet aber trotzdem, den gewünschten Vergleich verschiedener Betriebsfälle auf gleicher Basis genügend zutreffend durchzuführen.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich überwiegend mit dem Anfahr- (Beschleunigungs-) Vorgang des Flugkörpers, es sei daher ausdrücklich betont, daß weitere prak-

¹ Wobei von gewissen Erweiterungen dieser Formel und notwendigen geringfügigen Korrekturen bei der Anwendung auf unser Problem abgesehen werden soll.

² Lorenz: Der Raketenflug in die Stratosphäre. Jb. wiss. Ges. Luftf. 1928.

³ Lorenz: Die Ausführbarkeit der Weltraumfahrt. Jb. wiss. Ges. Luftf. 1928.

tische Fragen insonderheit die nach der gesamten Reichweite bei gegebener und verfügbarer Brennstoffmenge nicht behandelt werden. Diese letzteren Probleme hängen freilich auch sehr wesentlich von der Flughöhe und von der eingehaltenen Fluggeschwindigkeit (Drosselung des Schubes) ab; da diese Dinge schon wiederholt bearbeitet worden sind, so mögen sie daher hier übergangen werden. Der Anschluß, bzw. die Verbindung mit den hier durchgeführten Rechnungen ist in allen Fällen einfach zu erledigen, wobei natürlich zu bemerken ist, daß mit wachsender Strecke gleicher Fluggeschwindigkeit der Anfahrvorgang an Bedeutung verliert.

Bezeichnungen:

- m_0 Anfangs-
 m End-
 w Strahlgeschwindigkeit (relativ zum Flugzeug),
 v momentane Fluggeschwindigkeit,
 s zurückgelegter Weg des Flugzeugs (Meter)
 z erreichte Höhe (Meter)
 ρ Dichte in der Höhe h ,
 γ Steigwinkel der Flugbahn,
 $F_s = c_w F$ schädliche Fläche des ganzen Flugzeugs von der Fläche F , daher ist
 k Widerstandskoeffizient $= \rho/2 F_s$ und
 $k v^2$ der Gesamtwiderstand des Flugzeugs.

Wir vergleichen nun die nachstehenden Fälle:

1. Konstante Flugbeschleunigung $\frac{dv}{dt} = b$ (bis zu v_{\max}), darauf weiterer Anstieg mit v_{\max} bis zur gewünschten Höhe.
2. Konstantes Verhältnis der zeitlichen Massenabnahme $\frac{dm}{dt} = -c$.
3. Konstantes Verhältnis der zeitlichen Massenabnahme zur Restmasse $\frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dt} = -c_1$.

Änderung der Luftdichte.

Für die mit der Höhe veränderliche Dichte ist zunächst ein einfacher Ansatz zu finden. Unter Zugrundelegung der Normalatmosphäre kann für diese Rechnung genau genug

$$\rho = \rho_0 - a z \quad (3)$$

gesetzt werden. Wir nehmen konstanten Steigwinkel γ an und haben mit $z = s \sin \gamma$ und dem Wege $s = \int v dt$

$$\rho = \rho_0 - a \sin \gamma \int v dt, \quad (3a)$$

wobei die Zahlenwerte $\rho_0 = 0,125 \frac{\text{kg}^*}{\text{m}^3}$ und $a = 9 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}^*}{\text{m}^4}$ eingesetzt⁴ werden können (wegen $\rho = 0,04$ in 10000 Höhe; Wege und Höhen in Meter!).

Der Luftwiderstand.

Der Luftwiderstand ist allgemein $W = F c_w v^2 \rho/2 + F_s v^2 \rho/2$, wobei in F_s auch der unveränderliche Anteil des Tragflächenwiderstandes enthalten sein möge. c_w ist dann nach der Polaren (mit $c_a = 0$ und c_{w0} beginnend) anzusetzen. Um die Rechnung nicht zu sehr zu komplizieren, möge für diese ein lineares Gesetz für die Beziehung

⁴ kg^* ist Massenkilogramm! $\left(\frac{\text{kg s}}{\text{m}^3}\right)$.

$c_a = n c_w$ angenommen werden, also die Tangente an die Polare an Stelle derselben! Es ist dann

$$\frac{1}{n} c_a F \varrho/2 v^2 = \frac{m}{n} g \cos \gamma, \quad (4)$$

somit ist der Gesamtwiderstand

$$W = \frac{m}{n} g \cos \gamma + F_s \varrho/2 v^2. \quad (4a)$$

Hier kann das erste Glied mit dem unmittelbaren Schwereeinfluß $g \sin \gamma$ vereinigt werden in der abgekürzten Bezeichnung

$$g' = g \left(\sin \gamma + \frac{1}{n} \cos \gamma \right). \quad (5)$$

Dann bleibt für $k v^2$ das zweite Glied $k v^2 = F_s \varrho/2 v^2$.

Bei einigen späteren Beispielen erweist es sich als notwendig — um die Integration der Differentialgleichungen nicht allzusehr zu komplizieren —, sowohl eine mittlere Masse m_m als auch einen Dichtemittelwert, bzw. einen mittleren Widerstandsbeiwert k_m für das Glied $k v^2$ zu verwenden. Für k gilt der Ansatz

$$k = \frac{1}{2} F_s \left(\varrho_0 - a \sin \gamma \int v dt \right), \quad k_m = \frac{1}{2} F_s (\varrho_0 - a \sin \gamma s_m), \quad (6)$$

der zweckmäßig zonenweise, etwa von 2000 zu 2000 m berechnet wird. Die ganze Rechnung wird dann ebenfalls in den gleichen Zonenabständen durchgeführt, wobei gleichzeitig auch die Veränderlichkeit von w (zonenweise konstant) berücksichtigt werden kann. Andererseits ist bei Zahlentafeln ein „Eingang“ in gleichen Zeitschritten (s veränderlich) zweckmäßiger.

Berücksichtigung des Startvorganges.

Für alle Beispiele dieser Arbeit ist ein geradliniges Ansteigen des Flugkörpers unter dem Steigwinkel γ vorgesehen. Damit diese Bedingung erfüllt sein kann, muß der Start etwa wie folgt durchgeführt werden:

1. Eine schiefe Startbahn unter dem Winkel γ ist so lang auszuführen, daß an ihrem Ende die Geschwindigkeit v_0 gerade die Größe erreicht, für die der maximale Tragflächenauftrieb genügt, um den Steigflug weiter unveränderlich zu halten. Es muß also die Bedingung am Startende erfüllt sein

$$v_0^2 = 2 b_0 l_0 = \frac{m g \cos \gamma}{c_{a \max} F \varrho/2} \quad (7)$$

(mit $c_{a \max} = 0,8$ wird in den nachfolgenden Zahlenbeispielen dafür $v_0 = 59$ m/s und l_0 nahezu 660 m bei der konstanten Beschleunigung $b = 2,6$ m/s² [im Falle I]); bei der Unmöglichkeit, so lange Startbahnen zu bauen, müßte hier ein Katapultstart in Verwendung treten mit hohen Anfangsbeschleunigungen b_0 . Mit $b_0 = 35$ m/s² verringert sich die Startbahnlänge auf $l_0 = 50$ m.

2. Anfahren auf horizontalem Boden mit Hilfsfahrgestell, das abgeworfen werden kann. Der Anstieg erfolgt, sobald genügend Auftrieb vorhanden ist, um — mit kurzer Übergangskurve — den Weiterflug unter dem konstanten Winkel γ zu ermöglichen.

3. Ein Zwischenfall ergibt sich durch eine verkürzte Startbahn unter Winkel γ wie bei 1, aber mit dem in den Beispielen berechneten Beschleunigungsverlauf. v_0 reicht jetzt nicht aus und die Flugbahn wird zuerst etwas absinken.

In den nachstehenden Beispielen ist wegen des besseren gegenseitigen Vergleiches der (nicht realisierbare) erste Fall angenommen worden und die Bewegung aus der Ruhe begonnen (Ausnahme auf S. 180). Die Umrechnung auf eine für alle Fälle gleiche Anfangsgeschwindigkeit v_0 , wie sie praktisch erforderlich wäre, ist in jedem Falle möglich, wenn auch die Formeln dadurch verwickelter werden.

Die Bewegungsgleichungen.

Da geradliniges Ansteigen vorgesehen ist, fällt in der Bewegungsgleichung für die bahnsenkrechten Kräfte das die Fliehkraft enthaltende Glied fort. Es bleibt

$$m g \cos \gamma - c_a F \varrho / 2 v^2 = 0. \quad (8)$$

In der Bahnrichtung folgt aus dem Impulssatz für die veränderliche Masse

$$w \frac{dm}{dt} + m \frac{dv}{dt} + m g' + k v^2 = 0. \quad (9)$$

Die letztere Gleichung enthält drei Veränderliche m , v , t ; es ist daher noch eine Bedingung willkürlich, wie dies bei den verschiedenen Annahmen angedeutet wird.

Wir verzeichnen kurz das bekannte Ergebnis der Rechnung ohne Luftwiderstand bei schiefe Aufstiege unter dem konstanten Steigungswinkel γ . Es ist mit

$$g' = g \left(\sin \gamma + \frac{\cos \gamma}{n} \right) \quad w \frac{dm}{dt} + m \frac{dv}{dt} + g' m = 0, \quad (9a)$$

woraus die beiden grundlegenden Beziehungen folgen

$$\left. \begin{aligned} \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) &= \frac{1}{w} (v + g' t), \\ \frac{dv}{dt} + g' &= -w \left\{ \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \right\} = -\sigma w. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Bei konstanter Fahrtbeschleunigung und Bahnneigung ist also die zeitliche Massenabnahme der jeweiligen Masse m proportional $\left(\frac{dm}{dt} = -\sigma m \right)$. Mit Luftwiderstand nimmt dagegen $\left\{ \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \right\}$ mit wachsendem v absolut zu oder umgekehrt: bei konstant gehaltenem Verhältnis σ muß die Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ oder die Bahnneigung (eventuell auch beide) abnehmen.

Die Sonderfälle.**I. Konstante Fahrtbeschleunigung $b = \frac{dv}{dt}$.**

$$\text{Es ist hier wegen } s = \int v dt = \frac{b t^2}{2}$$

$$\varrho = \varrho_0 - a \sin \gamma \frac{b t^2}{2},$$

damit wird

$$k = \frac{F_s}{2} \varrho = \frac{F_s}{2} \left(\varrho_0 - \frac{a}{2} \sin \gamma b t^2 \right);$$

aus (9a) wird dann mit (4) und mit der Abkürzung $g' = g \left(\sin \gamma + \frac{\cos \gamma}{n} \right)$

$$w \frac{dm}{dt} + m \left(\frac{dv}{dt} + g' \right) + \frac{F_s}{2} v^2 \left(\varrho_0 - \frac{a}{2} \sin \gamma b t^2 \right) = 0. \quad (11)$$

Diese letztere Gleichung wird auch dann verwendet werden können, wenn die Fahrtbeschleunigung b nur angenähert konstant bleibt, da eine allgemeine Behandlung von Gl. (9), wobei durch nochmaliges Differenzieren das Integral $s = \int v dt$ [aus Gl. (3a) oder (6)] weggebracht werden kann, völlig aussichtslos erscheint.

Ist nun die Beschleunigung $\frac{dv}{dt} = b$ konstant, dann kann sie bei schiefer Anstiegslinie (γ) mit g' zusammengefaßt werden, wobei noch $v = b t$ und

$$b' = b + g' = b + g \left(\sin \gamma + \frac{\cos \gamma}{n} \right) \quad (12)$$

gesetzt werde. Damit geht Gl. (11) über in

$$w \frac{dm}{dt} + m b' + \frac{F_s}{2} \left(g_0 b^2 t^2 - \frac{a \sin \gamma b^3 t^4}{2} \right) = 0. \quad (13)$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist

$$m = e^{-\frac{b'}{w}t} \left\{ C - \int e^{-\frac{b'}{w}t} \left(\varrho_0 b^2 t^2 - \frac{a \sin \gamma b^3 t^4}{2} \right) \frac{F_s}{2w} dt \right\}, \quad (14)$$

woraus für $t = 0$ mit $m = m_0$ und mit der bekannten Entwicklung der Integrale $\int e^x x^2 dx$ und $\int e^x x^4 dx$ folgt

$$m = C_0 e^{-\frac{b'}{w}t} + \frac{F_s}{2b'} b^2 \left\{ \frac{a}{2} \sin \gamma b \left(t^4 - 4 t^3 \frac{w}{b'} + 12 t^2 \frac{w^2}{b'^2} - 24 t \frac{w^3}{b'^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + 24 \frac{w^4}{b'^4} \right) - \varrho_0 \left(t^2 - 2 t \frac{w}{b'} + 2 \frac{w^2}{b'^2} \right) \right\} \quad (15)$$

mit

$$C_0 = m_0 - \frac{F_s}{2b'} b^2 \frac{w^3}{b'^2} \left(b a \sin \gamma \frac{w^2}{b'^2} - 2 \varrho_0 \right).$$

Die zahlenmäßige Ausrechnung von Gl. (15) ist wegen der kleinen Differenzen großer Zahlen unsicher. Wir schlagen daher einen Näherungsweg ein, der uns überdies zu der erwünschten Bedingung für ein Minimum von m_0/m bei gegebener Wegstrecke s führt. Zu diesem Zweck wird Gl. (13) umgeschrieben

$$w \frac{dm}{m} + b' dt + \frac{F_s}{2m_m} \left(\varrho_0 b^2 t^2 - \frac{a \sin \gamma}{2} b^3 t^4 \right) dt = 0 \quad (13a)$$

und dabei die veränderliche Masse m nur im Widerstandsglied durch einen zonenweise konstanten Mittelwert m_m ersetzt, der aus Beispielrechnungen geschätzt wird.

Jetzt ist gliedweise Integration mit dem Anfangswert m_0 möglich und wegen $v = b t = \sqrt{2 b s}$ wird dann

$$w \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) = b t + g' t + \frac{F_s}{2m_m} \int_0^t \left(\varrho_0 b^2 t^2 - \frac{a \sin \gamma}{2} b^3 t^4 \right) dt. \quad (16)$$

Für das die veränderliche Dichte enthaltende, von b und s abhängige Widerstandsglied folgt dann

$$\frac{F_s b^2}{2m_m} \int_0^t t^2 \left(\varrho_0 - \frac{a \sin \gamma}{2} b t^2 \right) dt = \frac{F_s}{2m_m} (2s)^{3/2} \left(\varrho_0^{1/2} - \frac{a \sin \gamma s}{5} \right) \sqrt{b} = \\ = C \frac{F_s}{2m_m} (2s)^{3/2} \sqrt{b}$$

mit

$$C = \left(\frac{1}{3} \varrho_0 - \frac{1}{5} a \sin \gamma s \right), \quad (16a)$$

womit endlich

$$w \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) = \sqrt{2s} \left\{ \frac{g'}{\sqrt{b}} + \sqrt{b} \left(1 + \frac{C F_s s}{m_m} \right) \right\}. \quad (17)$$

Ein Extremalwert (hier Minimum!) für m_0/m ergibt sich durch Differenzieren nach \sqrt{b} und führt zu der Beziehung

$$b_{\text{opt}} = \frac{g'}{1 + (1/m_m) C F_s s} \quad (18)$$

für die günstigste Beschleunigung, wobei aber auch an die vorgeschriebene Geschwindigkeitsbeschränkung ($v_{\text{max}} = 290 \text{ m/s}$) gedacht werden muß; es ist also auch die Bedingung

$$b_{\text{opt}} \leq \frac{v_{\text{max}}^2}{2s}. \quad (18a)$$

zu beachten!

Wir folgern: Die konstante Fahrtschleunigung muß um so größer sein, je steiler die Flugbahn ist, je kleiner die Fahrtstrecke s sein soll und je größer die Flächenbelastung ist (wegen $\frac{m_m}{F_s}$ proport. $\frac{m_m}{F}$).

Formel (18) erweitert sich, wenn eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 (etwa bei Katapultstart) vorgegeben ist. Man findet nach leichter Rechnung für diesen Fall:

$$b_{\text{opt}} = \frac{g' + v_0^2 \frac{F_s}{2 m_m} \left(\varrho_0 - \frac{1}{3} a \sin \gamma \cdot s \right)}{1 + \frac{C F_s s}{m_m}}. \quad (18b)$$

An dieser Stelle soll auch einmal der Einfluß gezeigt werden, der durch die Berücksichtigung der mit der Höhe veränderlichen Strahlgeschwindigkeit w entsteht. Rechnet man nach der eingangs gegebenen Formel (1) die Abnahme von w mit der Höhe h ($= s \sin \gamma$) und mit $p = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{8300}}$,³ so läßt sich eine fast lineare Abnahme (in dem interessierenden Höhenraum) bei $g' = 6$ ansetzen

$$w \sim w_{\text{max}} (9,7 \cdot 10^{-6} s + 0,703) = w_{\text{max}} (A s + B). \quad (19)$$

Damit wird Gl. (17)

$$w_{\text{max}} \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) = \frac{b + g'}{\sqrt{2b}} \int \frac{ds}{(A s + B) \sqrt{s}} + \sqrt{2b} \frac{K}{m} \int \frac{ds \sqrt{s}}{A s + B} \quad (20)$$

und dies ergibt als Lösung

$$w_{\text{max}} \ln \frac{m_0}{m} = \frac{2}{\sqrt{A B}} \arctg \sqrt{\frac{A}{B} s} \left\{ \frac{b + g'}{\sqrt{2b}} - \frac{k_m}{m_m} \sqrt{2b} \frac{B}{A} \right\} + \frac{k_m}{m_m} \sqrt{2b} \frac{2}{A} \sqrt{s}. \quad (21)$$

Bilden wir auch hier einen Minimalwert für $\ln (m_0/m)$ durch Differenzieren nach $\sqrt{2b}$, so folgt schließlich ähnlich wie Gl. (17)

$$b_{\text{opt}} = \frac{g'}{1 + \frac{2k_m}{m_m} \sqrt{\frac{B}{A}} \frac{\sqrt{s} - \sqrt{B/A} \arctg \sqrt{A/B \cdot s}}{\arctg \sqrt{A/B \cdot s}}}. \quad (22)$$

Zahlenbeispiel.

Bei einer angenommenen Strahlgeschwindigkeit $w = 2500$ m/s und einer Anfangsmasse $m_0 = 1000$ kg* soll der Anstieg unter 30° ($\sin \gamma = 0,5$) erfolgen bis auf Höhen von 5000, 7500, 10000 m ($s = 10000, 15000, 20000$ m). Bei einer Tragfläche von 50 m² sei die schädliche Widerstandsfläche $(4,8\%) F_s = 2,4$ m², während der Tragflächenwiderstand aus einer linearen Polaren (s. S. 177) mit $n = 8,5$ durch $\frac{\cos \gamma}{n} = 0,1$ eingeführt wird. Es ist dann

$$g' = g \left(0,5 + \frac{1}{2} \sqrt{3} \right) \sim 6.$$

Zur Berechnung der günstigsten Beschleunigungen stellen wir in Tab. 1 auf: das „Dichteglied“ $C = \frac{1}{3} \varrho_0 - 2 s \frac{a \sin \gamma}{10}$, die mittlere Masse m_m (vorläufig geschätzt), die günstigste Beschleunigung b_{opt} nach Gl. (18), die darnach berechnete Massenabnahme im Verhältnis $\frac{m_0}{m}$ und die verbleibenden Restmassen m .

Tabelle 1 ($b = \text{konst.}$).

h	s	C	Geschätzt m_m	Erste Rechnung b_{opt}	m_0/m	m	Korrigiert m_m	b_{opt}	m	v	t
5000	10000	0,031	800	3,10	1,45	690	850	3,20	700	233	73
7500	15000	0,025	750	2,72	1,53	655	825	2,88	675	295	103
10000	20000	0,020	700	2,54	1,80	525	760	2,63	545	324	123

Bemerkung zu den Zahlenrechnungen.

Da in vielen der weiterhin verwendeten Formeln Ausdrücke meist im Nenner vorkommen, die kleine Differenzen großer Zahlenwerte enthalten, ist eine sehr genaue Rechnung erforderlich.

Bei Berücksichtigung der veränderlichen Strahlgeschwindigkeit w ändern sich diese Zahlen nach Gl. (22) nicht unwesentlich. Es ist dann $b_{\text{opt}} = 1,95$ und wir erhalten damit für $s = 20\,000$ m

$$t = 142 \text{ s}, \quad v = 280 \text{ m/s} \text{ und } \frac{m_0}{m} = 1,82,$$

d. h. es findet sich bei gleichem s trotz kleinerer Geschwindigkeit ein größerer Massenverbrauch. Dagegen bringt die Einführung einer Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 110$ m/s nach Gl. (18b) eine optimale Beschleunigung $3,4$ m/s².

Ein Nachteil dieser Fahrweise ist offensichtlich der: die günstigste Beschleunigung bringt verhältnismäßig bald die zulässige Höchstgeschwindigkeit hervor, schon bevor die gewünschte Strecke (Höhe) erreicht ist.

Dem könnte abgeholfen werden durch eine allgemeinere Fassung der Aufgabe:

Es soll bis zu einer gewissen Wegstrecke s die Fahrt beschleunigt werden (etwa bis zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit oder bei anderen Bedingungen). Von da ab soll dann gleichförmig und unter dem gleichen oder einem anderen, aber auch gleichzuhaltendem Anstiegswinkel weiter gestiegen werden bis zur gewünschten Höhe. Welches ist dann die günstigste Beschleunigung und wie wird die ganze Wegstrecke S am vorteilhaftesten unterteilt in die Beschleunigungsstrecke s und die gleichförmig durchlaufene Strecke $s_1 = S - s$? Die Zeitdauer dieser zweiten Strecke ist $t_1 = (S - s)/\sqrt{2bs}$ und der Mittelwert der Masse auf dieser Strecke ist m_{m1} .

Bei gleichgehaltener Strahlgeschwindigkeit w und mit $v_{\text{max}} = \sqrt{2bs}$ ist die gesuchte Massenabnahme von m_0 auf m zu ermitteln aus den beiden Teilen I und II:

$$\left. \begin{aligned} w \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) &= \left\{ \sqrt{2s} \left[\overbrace{g'/\sqrt{b} + \sqrt{b}}^{\text{I}} \left(1 + \frac{CF_s s}{m_m} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (S-s) \left\{ \overbrace{\frac{g'}{\sqrt{2bs}} + \sqrt{2bs} \frac{F_s}{2m_{m1}}}^{\text{II}} \left(\varrho_0 - a \sin \gamma \frac{S-s}{2} \right) \right\} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Mit $v_{\text{max}} = \sqrt{2bs}$ wird dies

$$\left. \begin{aligned} w \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) &= v_{\text{max}} \left\{ \overbrace{\frac{g'}{b} + 1 + \frac{CF_s s}{m_m}}^{\text{I}} + \right. \\ &\quad \left. + (S-s) \left\{ \overbrace{\frac{g'}{v_{\text{max}}} + \frac{v_{\text{max}} F_s}{2m_{m1}}}^{\text{II}} \left(\varrho_0 - a \sin \gamma \frac{S-s}{2} \right) \right\} \right\}. \end{aligned} \right\}$$

Einen Kleinstwert von $w \ln \frac{m_0}{m}$ bekommt man mit $\frac{d}{ds} \ln \left(\frac{m_0}{m} \right) = 0$ für

$$S - s = \frac{1}{a \sin \gamma} \left\{ \varrho_0 - 2C \frac{m_{m1}}{m_m} - \frac{2g' m_{m1}}{F_s v_{\text{max}}^2} \right\}, \quad (24)$$

wobei das „Dichteglied“ C für die erste Strecke, der Massenmittelwert m_{m1} für die zweite zu nehmen ist.

Im Zahlenbeispiel ist mit $S = 20\,000$ m und $C \sim 0,028$ und mit der vorläufigen Schätzung $m_m \sim 800$ und $m_{m1} \sim 650$ kg*

$$S - s = \frac{10^6}{4,5} \left\{ 0,125 - 0,045 - \frac{12 \cdot 650}{2,4 \cdot 290^2} \right\} = 9100 \text{ m},$$

die beiden Wegteile sind somit

$$s \sim 10\,900 \text{ m} \quad \text{und} \quad S - s \sim 9100 \text{ m}.$$

Die optimale Beschleunigung im ersten Wegteil ist dann $b = 3,85 \text{ m/s}^2$. Die Flugzeiten sind im ersten Teil $t_1 = \frac{290}{3,85} = 75 \text{ s}$, im zweiten Wegteil $t_2 = \frac{9100}{290} = 31,4 \text{ s}$. Die Gesamtzeit ist also $106,4 \text{ s}$ und das gesamte Massenverhältnis wird schließlich mit $w \ln \frac{m_0}{m} = 1410$ zu

$$\frac{m_0}{m} = 1,76, \quad \text{also} \quad m = 570 \text{ kg*}.$$

Das ist also ein tatsächlich um etwa $6,5\%$ geringerer Verlust an Masse als im ersten Falle (durchgehende Beschleunigung). Wir stellen nun zum Vergleich zusammen:

1. Konstante optimale Beschleunigung [Gl. (18)] für die ganze Strecke berechnet:
 $b = 2,63 \text{ m/s}^2$; $V_{\max} = 324 \text{ m/s}$, Zeitdauer 123 s , Massenabnahme $\frac{m_0}{m} = 1,855$.
2. Beschränkung auf $v_{\max} = 290 \text{ m/s}$ bei $S = 20000 \text{ m}$, somit $b = 2,1 \text{ m/s}^2$, Zeitdauer 138 s , Massenabnahme $\frac{m_0}{m} = 1,87$.
3. Berechnung in drei Zonen ($s_1 = 10000$, $s_2 = 15000$, $s_3 = 20000$), Zeitdauer 123 s , Massenabnahme $1,82$.
4. Trennung in Beschleunigungsstrecke und gleichförmige Fahrt $s = 10900$ und $s_1 = 9100$, Gesamtzeit $106,4$, Massenabnahme $\frac{m_0}{m} = 1,76$.

II.

Außer dieser naheliegenden und leicht zu kontrollierenden Betriebsart $b = \text{konst.}$ sind noch zwei andere gesetzmäßig verlaufende Fahrtweisen bemerkenswert:

$$\text{und} \quad \frac{dm}{dt} = -c \quad (25)$$

$$\frac{dm}{dt} = -c_1 m. \quad (26)$$

Bei der ersteren ist die Massenabnahme zeitlich linear veränderlich

$$m = m_0 - c t \quad (27)$$

und es bleibt auch der Impulsschub der Rakete konstant (wenigstens in Annäherung), denn es ist dann auch $w \frac{dm}{dt} = \text{konst.}$

Die Beschleunigung ist hier ziemlich stark veränderlich. In großen Höhen, wo der Luftwiderstand nur sehr klein ist, nimmt b wegen der Massenabnahme zu; in geringen Höhen dagegen bewirkt der mit v zunehmende Luftwiderstand eine Abnahme der Beschleunigung, die aber wieder durch die mit der Höhe abnehmende Dichte allmählich in Zunahme umschlägt.

Zur genauen Bestimmung der kennzeichnenden Beziehung $v = f(t)$ schreiben wir mit (27) die Grundgleichung (9) in der Form:

$$\frac{w c}{m_0 - c t} = \frac{dv}{dt} + g' + \frac{k_m}{m_0 - c t} v^2. \quad (28)$$

Dies ist eine Riccattische Gleichung, deren exakte Lösung recht umständlich ist. Wir erlauben uns daher eine Vereinfachung durch zonenweise Behandlung mit jeweils konstant gehaltenem k_m und m_m . Für eine Zone, z. B. zwischen den Höhen h und h_1 (also s und s_1) hat man dann die Gleichung

$$\text{mit den Lösungen} \quad \left(\frac{w c}{m_m} - g' \right) - \frac{k_m v^2}{m_m} = \frac{dv}{dt} = \frac{v dv}{ds} \quad (29)$$

$$t = t_1 + \frac{1}{2 A} \ln \left(\frac{A v_m + v k_m}{A v_m + v_1 k_m} \right) \left(\frac{A v_m - v_1 k_m}{A v_m - v k_m} \right), \quad (30)$$

$$s = s_1 + \frac{m_m}{2 k_m} \ln \frac{(w c - g' m - v_1^2 k_m)}{(w c - g' m - v^2 k_m)} \quad (31)$$

mit

$$A = \sqrt{\frac{k_m}{m_m} \left(\frac{w c}{m_m} - g' \right)}. \quad (32)$$

Hier ist der Anfangszustand mit $t = t_1$, $s = s_1$, $v = v_1$ schon berücksichtigt und die Mittelwerte m_m und k_m für jede Zone eingesetzt worden.

Zahlenbeispiel.

Zur angenäherten Ermittlung der Grundkonstanten c benützen wir unter Verwendung der Hauptdaten des früheren Zahlenbeispiels die Gl. (31)

$$s = m_m/2 k \cdot \ln \left(\frac{w c - g' m_m}{w c - g' m_m - k_m v^2} \right)$$

und setzen darin die schätzungsweise angenommenen Werte ein: $m_m = 760 \text{ kg}^*$, $v_{\max} = 290 \text{ m/s}$, $s = 20000 \text{ m}$, $k_m \sim 0,07$. Es folgt damit $c \sim 4$. Nunmehr stellt man eine zonenweise eingerichtete Tabelle auf, bei der durch eventuell mehrfach wiederholte Korrekturrechnung das Widerstandsglied $k_m v^2/m_m$ gut angenähert worden ist. Aus dieser Tafel sind die wichtigsten Daten, insbesondere auch die entstehenden Beschleunigungen zu ersehen (vgl. auch hierzu die Kurven im Kurvenblatt, Abb. 1).

Tabelle 2.

t [s]	m [kg*]	m_m	k_m	v [m s ⁻¹]	$\frac{k_m v^2}{m_m}$	$\frac{w c}{m_m} - g'$ [m s ⁻²]	$\frac{w c}{m_m} - g' - \frac{k_m v^2}{m_m}$ [m s ⁻²]	s [m]
0	1000					4,0	4,0	0
30	880	940	0,1	90	1,04	4,60	3,56	1350
60	760	820	0,09	155	2,65	6,20	3,55	5050
90	640	700	0,067	220	4,40	8,3	3,9	10650
120	520	580	0,05	280	6,9	11,25	4,35	18150
150	400	460	0,035	380	11	15,8	4,8	28000

Aus der s -Kurve entnimmt man sodann die erforderliche Flugzeit $t = 128 \text{ s}$ für die gegebene Streckenlänge $s = 20000 \text{ m}$ und damit aus der v -Kurve die dort erreichte Geschwindigkeit $v = 299 \text{ m/s}$, ein Wert, der etwas zu groß ist, aber wegen der geringfügigen Abweichung eine nochmalige Korrekturrechnung erübrigt.

Aus diesem Ergebnis ist mit aller Deutlichkeit zu ersehen, daß die eben besprochene Betriebsweise in bezug auf den Massenverbrauch ungünstiger ist als die mit konstanter Beschleunigung, denn hier haben wir unter sonst gleichen Verhältnissen eine Massenabnahme $\frac{m_0}{m} = \frac{m_0}{m_0 - c t} = 2,04$ ($m = m_0 - c t = 488 \text{ kg}^*$).

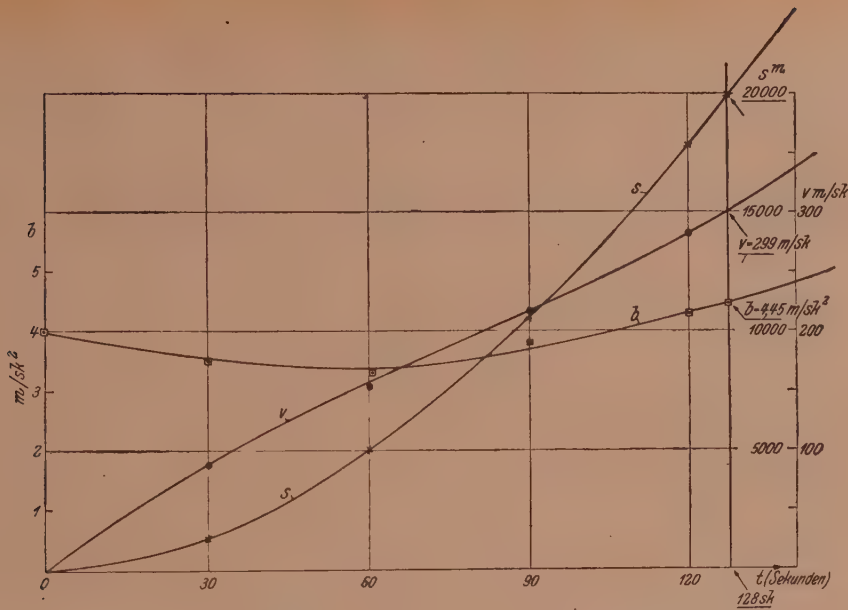
III.

Wir betrachten endlich noch den Betriebszustand

$$\frac{dm}{dt} = -c_1 m, \quad (33)$$

d. h. die zeitliche Abnahme der Masse soll dem verbleibenden Rest proportional sein. Die Grundgleichung (9) geht dadurch über in

$$w c_1 = \frac{dv}{dt} + g' + \frac{k v^2}{m}. \quad (34)$$


 Abb. 1. Zeitlicher Verlauf von s, v, b für den Fall II.

$$\frac{dm}{dt} = -c = -4,0.$$

Man könnte hier den Ansatz $m = m_0 e^{-c_1 t}$ machen und würde dadurch auf die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} e^{-c_1 t} = w c_1 e^{-c_1 t} + g' e^{-c_1 t} + \frac{k v^2}{m_0} \quad (35)$$

(die wegen des Gliedes v^2 vom Riccattischen Typus ist) geführt werden. Wegen der umständlichen Lösung einer solchen Gleichung empfiehlt es sich daher, auch hier wie früher für m einen Mittelwert m_m einzusetzen, ebenso k_m für k .⁵ Die erste Gleichung wird dann

$$\frac{dv}{dt} = (w c_1 - g') - \frac{k_m v^2}{m_m}, \quad (36)$$

woraus, sofern $w c_1 - g' > 0$ ist, die Zeit t aus der einfachen Quadratur folgt

$$t = \frac{1}{2 A_1} \ln \frac{A_1 + \frac{k_m}{m_m} v}{A_1 - \frac{k_m}{m_m} v}. \quad (37)$$

Umgekehrt ist die Geschwindigkeit

$$v = A_1 \frac{m_m}{k_m} \frac{e^{2 A_1 t} - 1}{e^{2 A_1 t} + 1} = v_{\max} \frac{e^{2 A_1 t} - 1}{e^{2 A_1 t} + 1}. \quad (38)$$

Durch weitere Integration findet man mit $s = 0$, für $t = 0$ den Weg

$$s = \frac{m_m}{k_m} \ln \frac{e^{A_1 t} + e^{-A_1 t}}{2} = \frac{m_m}{k_m} \ln (\cosh A_1 t). \quad (39)$$

Hierin ist zur Abkürzung

$$A_1 = \sqrt{\frac{k_m}{m_m} (w c_1 - g')} \quad (40)$$

eingeführt worden. Bei dieser Betriebsart würde also die Endgeschwindigkeit

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{m_m}{k_m} (w c_1 - g')} = \frac{m_m}{k_m} A_1 \quad (41)$$

⁵ Damit ist wieder eine zonenweise Durchführung angezeigt!

erst asymptotisch mit der Zeit erreicht werden (wegen der tatsächlichen Veränderlichkeit von $\frac{k_m}{m_m}$ trifft dies nur angenähert zu!), und v_{\max} ist auch von Zone zu Zone veränderlich (nimmt mit der Zeit [und Höhe] zu!).

Zahlenbeispiel.

Wir verwenden auch hier das gleiche Beispiel wie früher und ermitteln zunächst die kennzeichnende Konstante c_1 aus einer Kombination der Gl. (38) und (39) mit den Grundwerten $v = 290$ m/s und $s = 20000$ m. Das Verhältnis $\frac{m_m}{k_m}$ wurde mit ~ 11000 wie bei dem vorigen Fall einstweilen angenommen.

$$\text{Aus Gl. (39)} \quad s = 20000 = 11000 \ln \zeta_0 \beta (A_1 t)$$

folgt $A_1 t = 2,51$ und damit aus Gl. (38)

$$v = 290 = v_{\max} \frac{e^{2A_1 t} - 1}{e^{2A_1 t} + 1},$$

woraus die asymptotisch erreichbare Maximalgeschwindigkeit v_{\max} nunmehr etwas größer als 290, nämlich 294 m/s herauskommt. Mit Gl. (41)

$$\text{findet man schließlich} \quad 294 = \sqrt{(w c_1 - g')} \frac{m_m}{k_m}$$

$$c_1 = 0,00554,$$

weiter $A_1 = v_{\max} \frac{k_m}{m_m} = 0,0267$ und damit endlich die Flugdauer $t = 103$ s.

Die Massenabnahme ist bei dieser Betriebsart bemerkenswert gering, es ist $m_0/m = 1,69$,⁶ also die „Endmasse“ $m = 590$ kg*.

Tabelle 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
t	m	m_m	k_m	$\left(\frac{m_m}{k_m}\right)$	v_{\max}	$10^4 A_1$	$2 A_1 t$	$e^{2 A_1 t}$	v	$v^2 \frac{k_m}{m_m}$	b	s
[s]	[kg*]			$\frac{m_m}{k_m}$	[m s ⁻¹]				[m s ⁻¹]	$\frac{m_m}{k_m}$	[m s ⁻²]	[m]
0	1000						0	1	0		6,5	0
20	904	952	0,14	6830	210	308	1,23	3,3	113	1,8	4,7	1150
40	819	860	0,10	8600	234	273	2,21	9,1	185	4,05	2,45	4150
60	740	780	0,077	10200	258	254	3,05	20,5	240	5,66	0,84	8500
80	669	705	0,06	11800	278	235	3,76	43	274	6,15	0,35	13800
100	605	637	0,046	13800	297	205	4,3	65	296	6,2	0,30	19500

Diese letzteren Folgerungen bedürfen aber noch einer Korrektur durch die zonenweise Aufstellung der ganzen Rechnung in einer Tabelle 3, aus der zunächst hervorgeht, daß die Endgeschwindigkeit bei der Strecke $s = 20000$ m schon zu groß, nämlich $v = 305$ m/s geworden ist (infolge der genaueren Berücksichtigung der zonenweisen Dichte- und Massenabnahme!). — Es wurde daher mit einer kleineren Konstanten $c_1 = 0,005$ eine neue Rechnung aufgemacht, die in der hier mitgeteilten Tabelle 3 und in den Kurven Abb. 2 wiedergegeben ist. Auch hier ist das Endergebnis durch graphische Interpolation aus den v - und s -Kurven gewonnen worden. Man entnimmt

⁶ Wie Vergleichsrechnungen zeigen, ändert sich dieses Verhältnis auch so gut wie gar nicht, wenn für (m_m/k_m) größere oder kleinere Werte eingesetzt werden.

diesen die Resultate: Für $s = 20000$ m ist die Endgeschwindigkeit mit $v = 297$ m/s freilich noch immer etwas zu groß (es müßte also c_1 noch etwas verkleinert werden, wovon hier aber Abstand genommen wurde). Die Flugzeit beträgt 102 s und die Massenabnahme ist mit $\frac{m_0}{m} = 1,69$ gegenüber der oben summarisch ermittelten kaum geändert worden.

Die Fahrtweise dieses Beispiels nach dem Gesetz $dm/dt = -c_1 m$ erweist sich als bemerkenswert günstig — die Kontrolle und genaue Regelung der Fahrt nach diesem Gesetz dürfte aber ziemlich schwierig sein, da die Beschleunigung (nach

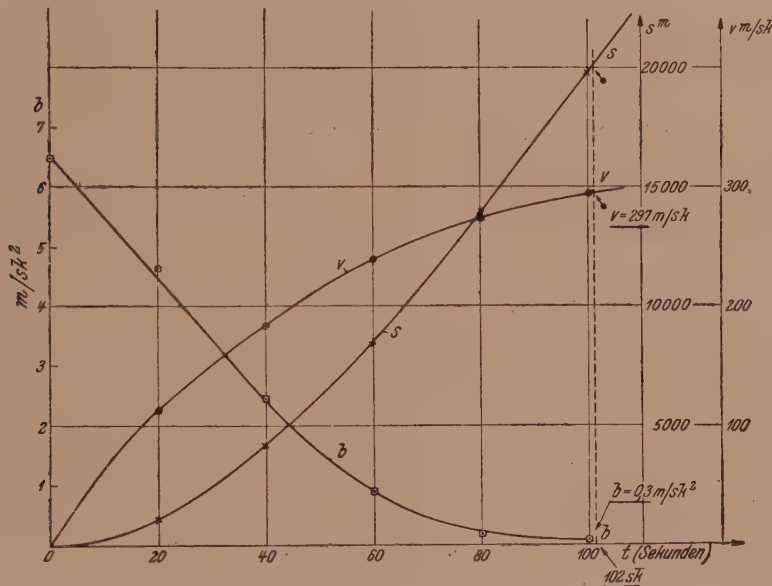


Abb. 2. Zeitlicher Verlauf von s, v, b für den Fall III.

$$\frac{dm}{dt} = -c_1 m, \quad c_1 = 0,005.$$

Tabelle 4.

Betriebsart	v m/s	m_0/m	m kg^*	t Sekunden	b_0 Anfangs- beschleunigung	b_1 End-
I. $b = \text{konst.}$ ($v_{\max} = 290$).....	290	1,87	535	138	2,1	2,1
I. a) b (optimal in 3 Zonen).....	324	1,82	545	123	2,63	2,63
II. $\frac{dm}{dt} = -c$ $c = 3,2$	295	2,04	490	12128	2,0	3,80
III. $\frac{dm}{dt} = -c_1 m$ $c_1 = 0,0050$	297	1,69	590	102	6,5	0,30
IV. Geteilter Betrieb: a) $b = \text{konst.}$, b) im zweiten Teil $b = 0$ $v = \text{konst.}$	290	1,76	570	106,4	3,85	—

der Kurve Abb. 2) in ihrer gesetzmäßigen Abnahme schwer im Betrieb einzuregeln sein dürfte (Anfangsbeschleunigung nach der Tabelle $6,5 \text{ m/s}^2$, Beschleunigung am Ende der Strecke $0,30 \text{ m/s}^2$). Wir geben nun eine Zusammenstellung der vorstehend durchgerechneten Beispiele in der Tabelle 4.

Nach dieser Zusammenstellung würde die Betriebsart III ($\frac{dm}{dt} = -vm$) bezüglich des Massenverbrauches am günstigsten erscheinen, der Fall II dagegen am schlechtesten abschneiden (dies ist aber nur eine Folge der zu geringen zugelassenen Endgeschwindigkeit!). An zweiter Stelle steht Fall IV (Geteilter Betrieb, erster Wegteil $b = \text{konst.}$, zweiter: $v = \text{konst.}$). Die Betriebsart $b = \text{konst.}$ kommt erst an dritter Stelle.

In ähnlicher Weise lassen sich auch noch andere Beispiele mit besonders gewählten Betriebsarten finden, deren Gesetzmäßigkeit entsprechende Zeit-, Geschwindigkeits- und Massenverhältnisse zeigen. Es wird sich aber, wie schon aus den betrachteten, recht verschieden gearteten Fällen hervorgeht (man vergleiche nur die sehr verschiedenen Beschleunigungskurven der Abb. 1 und 2), auch da, aller Voraussicht nach, nur um geringfügige Differenzen in der Massenabnahme für eine gegebene Flugstrecke handeln, während die Geschwindigkeiten vielleicht etwas größere Unterschiede zeigen.

Aus diesem, augenscheinlich mageren Ergebnis der ganzen Untersuchung wird man den vernünftigen Schluß ziehen, diejenige Betriebsart zu wählen, die am einfachsten zu regulieren und einzustellen ist, und da empfiehlt sich die gleichförmige Beschleunigung mit ihrem optimalen Wert, wie er sich aus Gl. (18) leicht errechnen läßt. Die Durchrechnung einer vierten Betriebsart (Massenabgabe je Wegeinheit konstant $\frac{dm}{ds} = -c_2$) scheint eine noch etwas geringere Abgabe von Masse zu erfordern, aber der Unterschied ist auch da viel zu gering, als daß er eine damit verbundene viel verwickeltere Regulierungsmöglichkeit rechtfertigen könnte.

Auch in den gewählten Beispielen bleibt die Beschleunigung in mäßigen Grenzen, was in gewissen Fällen der Anwendung eine wichtige Rolle spielen dürfte.

Es liegt nahe zu fragen, wie denn überhaupt der Betrieb reguliert und kontrolliert werden kann. Da unsere bisherigen Rechnungen neben dem konstanten Neigungswinkel auch bestimmte Beschleunigungsgesetze verlangen, so müssen also nach beiden Gesichtspunkten Kontrollmaßnahmen vorgesehen werden. Es muß also sowohl das Höhenruder als auch die Strahlöffnung (Impulsgröße!) eingestellt werden. — Der konstante Neigungswinkel — als Fortsetzung der künstlichen Startbahn — bedeutet freilich eine gewisse Einschränkung der Allgemeinheit, aber er ist sinnvoll, da er eine mittlere Bahnkurve bringt und für die Führung bequem kontrolliert werden kann. Im übrigen nähert sich (bei festgestelltem Ruder) bei sehr kleinen Tragflächen die Flugbahn einer flachen Wurfparabel „mit Antrieb“ („aktivierter Wurf“),⁷ während bei größeren Flächen die Tendenz zu immer steilerem Anstieg besteht (eventuell bis zum Überschlagen!). Die weiterhin gewünschte Beherrschung einer gesetzmäßigen Beschleunigung erfordert auch wieder besondere Betriebsmaßnahmen (z. B. Impulsbeeinflussung, wie erwähnt!), Kontrolle durch Beschleunigungsmesser bei gleichzeitiger Wahrung der Konstanz von γ .

Eine wesentliche Erweiterung der bisherigen Aufgabe würde dagegen in der Freigabe des Neigungswinkels liegen. Dies käme auf die Ermittlung der freien Flugbahn des Körpers hinaus. Aber eine solche Problemstellung hat nur dann einen Sinn, wenn über Stellung und Bewegung des Höhenruders in gesetzmäßiger Weise verfügt werden kann, was offenbar mehr oder weniger von der Willkür der Bedienung abhängt.

⁷ Pröll: Der aktivierte Wurf. Mitt. dtsch. Akad. Luftf.-Forsch. (1943).

Die mit einer derartigen Erweiterung des Ursprungsproblems verbundenen Bewegungsgleichungen erfordern aber zu ihrer exakten Lösung schwierige und dazu meist wenig übersichtliche Operationen; es möge daher im folgenden Schlußkapitel nur der Gedankengang der Rechnung und der allgemeine Verlauf eines Beispiels wiedergegeben werden, ohne daß die Rechnung im einzelnen durchgeführt wird.

Flugbahn bei veränderlichem Neigungswinkel.

Wir gehen also jetzt von der bisherigen Annahme $\gamma = \text{konstant}$ ab und nehmen an, daß der Flugkörper mit festgehaltenem Ruder sich selbst überlassen bleiben soll. — Für die Ermittlung der Bahnkurve gelten dann zunächst die drei Bewegungsgleichungen in der Vertikalebene:

$$\left. \begin{aligned} w \frac{dm}{dt} + m \frac{dv}{dt} + mg \sin \gamma + c_w F/2 v^2 (\varrho_0 - a \int \sin \gamma ds) &= 0, \\ m v \frac{d\gamma}{dt} + c_a F/2 \cdot v^2 (\varrho_0 - a \int \sin \gamma ds) - mg \cos \gamma &= 0, \\ (c_{aH} l F_H - c_m F t) \frac{v^2}{2} (\varrho_0 - a \int \sin \gamma ds) &= J \frac{d^2 \gamma}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

mit den neuen Bezeichnungen: c_{aH} und F_H für das Höhenleitwerk, J Trägheitsmoment des Flugzeugs um die Querachse durch den Schwerpunkt, t Flügeltiefe, c_m Flügelmomentenbeiwert bezüglich der Querachse durch den Schwerpunkt.

Als vierte Bedingung kommt eine der in den früheren Beispielen gemachten Sonderannahmen hinzu, z. B. konstante Beschleunigung $b = \text{konst.}$ oder ähnliche Beziehungen.

Als Veränderliche sind dann anzusehen: die veränderliche Masse m , der Bahnneigungswinkel γ , der Anstellwinkel α und die Geschwindigkeit v .

Wenn wir hier — wie erwähnt — als vierte Bedingung $b = \text{konst.}$ einführen, so wird (in Abhängigkeit von der Zeit) $v = b t$ und $s = \frac{1}{2} b t^2$.

Für die aerodynamischen Flügeldaten dürfen wir die vereinfachten Beziehungen einführen mit Abb. 3:

$$\left. \begin{aligned} c_a &= c_{a0} + \alpha \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \sim c_{a0} + \alpha c_a' \quad \left(\text{wo } c_a' = \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \sim \text{konst. anzunehmen ist} \right), \\ c_w &= c_{w0} + k_1 \alpha + k_2 \alpha^2, \\ c_m &= c_{m0} + \alpha c_m' - e c_a \quad \left(c_m' = \frac{\partial c_m}{\partial \alpha} \text{ ebenfalls konstant angenommen} \right). \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Die Lösung des Gleichungssystems (42) ist allgemein nicht möglich. Dagegen gelingt es, für Zahlenbeispiele nach einem der bekannten Näherungsverfahren brauchbare Ergebnisse zu finden.

Aus einem solchen, nach dem Iterationsverfahren von Professor von Sanden⁸ durchgerechneten Beispiel, bei dem durch eine lange Startbahn dem Flugkörper eine verhältnismäßig große Anfangsgeschwindigkeit erteilt worden ist und wobei noch die Höhenrudereinstellung als festgehalten angenommen ist, geht hervor, daß der dadurch ursprünglich eingestellte Bahnneigungswinkel zunächst rasch anwächst, um dann allmählich in flachen Wellen einer geradlinigen Bahn zuzustreben. Wenn

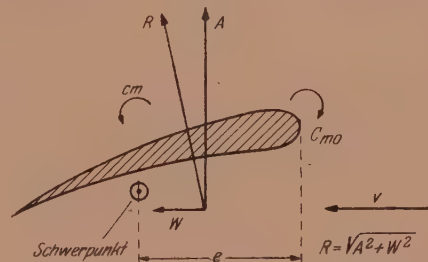


Abb. 3. Luftkräfte am Tragflügelprofil.
 $A = c_a \varrho/2 v^2 F$, $W = c_w \varrho/2 v^2 F$,
 $M = c_m \varrho/2 v^2 t$.

⁸ von Sanden: Praxis der Differentialgleichungen.

sich bei anderer Wahl der Ausgangs- und der Impulsdaten auch Fälle mit Überschlagstendenz nachweisen lassen, so zeigt die erwähnte, unseren früheren Beispielen angepaßte Rechnung, daß eine „mittlere“ Bahnkurve, wie wir sie mit $\gamma = \text{konst.}$ angenommen hatten, einigermaßen berechtigt ist.

Zusammenfassung.

Ausgehend von der Impulsgleichung für den Strahlantrieb von Flugkörpern werden unter Berücksichtigung der Dichteänderung mit der Höhe die Anstiegsverhältnisse unter verschiedenen Betriebsbedingungen untersucht und in vergleichenden Zahlenbeispielen nebeneinander gestellt. Es zeigt sich, daß die Unterschiede der betrachteten Betriebsarten sowohl hinsichtlich der Massenabnahme als auch in bezug auf die bei vorgegebener Streckenlänge (Höhe) erzielten Geschwindigkeiten nur geringfügig sind, so daß es sich daher empfiehlt, den Betrieb so einzurichten, daß er am besten reguliert und leicht kontrolliert werden kann, d. h. mit gleichbleibender Beschleunigung. — In einem Schlußkapitel wird noch der allgemeinere Fall besprochen, daß der Bahnneigungswinkel nicht mehr künstlich konstant gehalten wird, sondern frei bleiben soll.

(Eingegangen am 5. März 1946.)

Mitteilungen aus dem Institut für Schwachstromtechnik an der Technischen Hochschule Wien.

Die geoelektrischen Verfahren der angewandten Geophysik.

Von V. Fritsch, Wien.

Mit 18 Textabbildungen.

Inhalt.

1. Allgemeines.
2. Gleichstromverfahren.
3. Niederfrequenzverfahren.
4. Hochfrequenzverfahren.
5. Impulsverfahren.
6. Auswertung.
7. Fehlerquellen.
8. Untersuchung von Wasservorkommen.
9. Untersuchung von Schwimmsanden.
10. Untersuchung von Hohlräumen.
11. Untersuchung von Baugründen.
12. Untersuchung von Lagerstätten.
13. Untersuchung des Gasgehaltes von Kalilagerstätten.
14. Blitzerdermessungen.

Die Geoelektrik entwickelt Verfahren, die z. B. Wasser und nützliche Lagerstätten nachweisen. Solche Messungen sind sowohl mit Gleichstrom und Niederfrequenz als auch mit Hochfrequenz möglich. Die hochfrequenten Verfahren werden unter dem Namen Funkmutung zusammengefaßt.

1. Allgemeines.

Die Grundlage aller Untersuchungen ist der geologische Leiter. Er besteht aus Anteilen aller drei Aggregatzustände und ist allgemein ein komplexer Widerstand.

Die elektrischen Eigenschaften des geologischen Leiters sollen an dieser Stelle nicht besprochen werden, da dies zu weit führen würde. In der Fachliteratur existieren darüber genaue Angaben.

Die Kopplung des Meßgerätes mit dem Untergrund erfolgt galvanisch, kapazitiv oder induktiv. Bei galvanischer Kopplung muß die Meßelektrode auf den Boden gesetzt werden. Es sind dann Übergangswiderstände und Übergangskapazitäten zu berücksichtigen.

2. Gleichstromverfahren.

Man kann entweder den Verlauf der natürlichen Erdströme im Untergrunde bestimmen oder aber diesen durch besondere Elektroden Strom zuführen und die so erzeugte Strömung von der Erdoberfläche aus messen. Geoelektrische Diskontinuitäten kommen stets in einer Verformung des Potentialfeldes zum Ausdruck. Im allgemeinen muß man mit der Existenz von natürlichen und oft auch technischen Erdströmen bei allen Gleichstrommessungen rechnen.

Es sind zwei Methoden möglich: Entweder mißt man den Potentialunterschied zwischen zwei Elektroden oder aber man verschiebt eine dieser Elektroden so lange, bis dieser Potentialunterschied Null wird. Dann liegen beide Elektroden auf derselben Potential-eleiche.

Will man den Widerstand des Untergrundes nach dem Ohmschen Gesetz aus einer Strom- und Spannungsmessung berechnen, so muß man auch den Übergangs- und Bettungswiderstand der stromdurchflossenen Elektroden berücksichtigen. Da diese aber schwer zu isolieren sind, so wurden Verfahren entwickelt, deren Ergebnis durch ihren Einfluß nicht verfälscht wird.

Abb. 1 zeigt eine geeignete Schaltung. Der Strom wird über die Elektroden E_1 und E_2 zugeführt. Die Spannung wird zwischen S_1 und S_2 gemessen. Der Übergangswiderstand der Sonden wird keine Rolle spielen, wenn er viel kleiner ist als der innere Widerstand des Spannungsmessers. Dies ist praktisch leicht zu erreichen. Im Ersatzschema bedeutet R' den Übergangs- und Bettungswiderstand des Erders und R_i den inneren Widerstand des Meßgerätes. Die Potentialdifferenz zwischen S_1 und S_2 ist durch die Stromstärke J , die geometrische Anordnung der Elektroden und den spezifischen Widerstand des Untergrundes ϱ bestimmt. Das Potential eines der Punkte S ist:

$$\varphi_s = J \varrho \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Sind zwei Sonden S_1 und S_2 verlegt, die von den Elektroden E_1 und E_2 die Abstände r_1' und r_1'' bzw. r_2' und r_2'' haben, so ist der Potentialunterschied zwischen diesen beiden Sonden

$$\Delta\varphi = J \varrho \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'} - \frac{1}{r_1''} + \frac{1}{r_2''} \right].$$

Nach Wenner werden Sonden und Elektroden auf einer Geraden angeordnet. Der Abstand der vier Elektroden ist untereinander gleich. Es ist also die Strecke $\overline{E_1 S_1} = \overline{S_1 S_2} = \overline{S_2 E_2}$. Es gilt:

$$\Delta\varphi = U,$$

$$\varrho = \frac{U}{J} 2\pi r.$$

Der Verlauf der Potentialgleichungen und die Größe des scheinbaren spezifischen Bodenwiderstandes ϱ ist durch die geoelektrische Beschaffenheit des Untergrundes bedingt. Kennt man diese, so kann man auf die Bodenbeschaffenheit schließen.

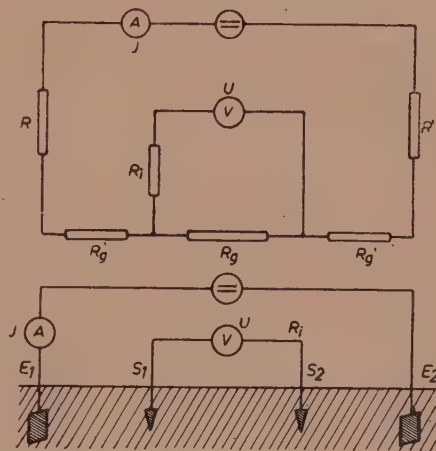


Abb. 1. Vierpolverfahren.

Führt man dem Untergrunde Gleichstrom zu, so ist diesem der natürliche Erdstrom überlagert. Die Stärke des Erdstromes schwankt nun ununterbrochen. Man muß sie daher ständig messen und je nach der Stromrichtung von dem Meßstrom in Abzug bringen oder diesem zuzählen. •

In der Natur treten unter bestimmten Voraussetzungen Filtrations- und Osmose-
spannungen auf. Wenn man diese bestimmt, so kann man Schlüsse auf die geologische
Schichtung des Untergrundes ziehen. Ein Beispiel zeigt Abb. 2. Zwischen zwei festen
Gebirgsschichten seien durchlässige Sandschichten D eingelagert. Der Gebirgs-
druck und der osmotische Druck sind mit p_g und p_o bezeichnet. E' ist eine Elektrode,
die in das Bohrloch eingehängt wird und E'' die in den Oberflächenschichten fest
verlegte Gegenelektrode. Es ist klar, daß die Porositätsspannung U_p an der Grenz-

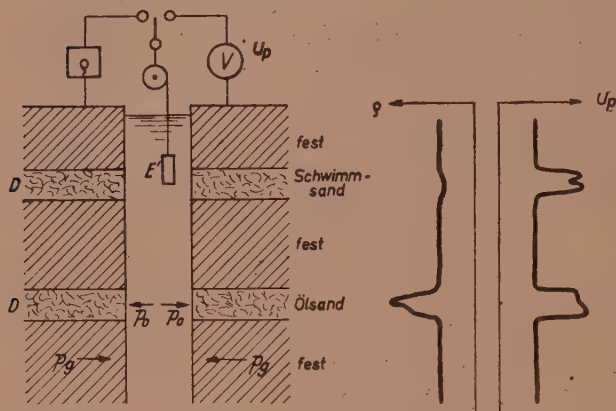


Abb. 2. Messung der Porositätsspannung.

Abb. 2 dargestellt sind. Schwimmsand wird z. B. an einer Abnahme des spezifischen
Widerstandes bei gleichzeitiger Zunahme der Porosität erkannt. Eine Ölsandschicht
bedingt eine Zunahme des spezifischen Widerstandes und eine Zunahme der Porosität.
Das Verfahren wurde von Schlumberger ausgebaut und ist heute zu einem unent-
behrlichen Hilfsmittel des Erdölsuchers geworden. In allen Erdteilen wurden tausende
solcher Diagramme aufgenommen.

3. Niederfrequenzverfahren.

Viele Gleichstromverfahren können auch dem Wechselstrombetrieb angepaßt
werden. Man muß aber berücksichtigen, daß dann nicht nur eine Strömung, sondern
auch ein Magnetfeld existiert, das wieder im Untergrund eine sekundäre elektrische
Strömung erzeugt. In jedem Punkt überlagern sich somit zwei Ströme, von denen
der eine direkt erzeugt wird, der andere aber vom Magnetfeld induziert wird. Da
diese gegeneinander phasenverschoben sind, so entsteht, wie dies Ambronn in einer
grundlegenden Arbeit dargelegt hat, eine elliptisch polarisierte Schwingung.

Außer diesen Verfahren, die sich von den analogen Gleichstromverfahren nur
durch den Betriebsstrom unterscheiden, gibt es auch besondere, die nur für Wechsel-
strom geeignet sind. Man kann durch den Untergrund einen Wechselstrom leiten
und die Spannung messen, die er in einem Rahmen induziert, der über dem Boden
angebracht wird. Die Anordnung zeigt Abb. 3. Wir sehen den Wechselstromgenerator,
der über dem Amperemeter mit den Elektroden E verbunden ist. L ist der Meßrahmen.
Er wird mit einem Voltmeter verbunden. Im Ersatzschema ist der Widerstand des
Untergrundes mit R_g bezeichnet. Die Kopplung des Rahmens mit dem Untergrund
wird durch die Selbstinduktion L und L_g dargestellt.

Der Ausschlag am Voltmeter V ist ein Maß für die induzierte Feldstärke. Durch Drehen des Rahmens und Bestimmung des Maximalausschlages kann man die Richtung des Feldes ermitteln. Man hat also bei diesen Verfahren zwei Bestimmungsstücke

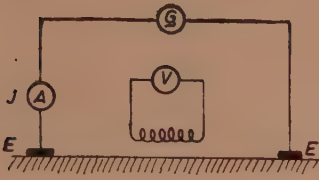


Abb. 3. Rahmenverfahren.

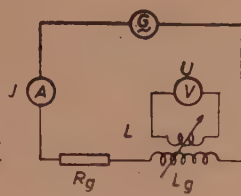


Abb. 4. Einfluß einer inhomogenen Einlagerung.

gewonnen. Wenn der Untergrund nicht homogen ist, sondern eine Einlagerung von abweichender elektrischer Leitfähigkeit enthält, so gilt das in Abb. 4 dargestellte Ersatzschema. Der Widerstand R_g' stellt eine Strombahn im homogenen Teil, der Widerstand R_g'' eine Strombahn im inhomogenen Teil des Untergrundes dar. Beide induzieren im Meßrahmen L Ströme. Jede inhomogene Einlagerung verrät sich daher an einer Änderung der induzierten Feldstärke und meist auch an einer Änderung der Feldrichtung.

Man kann dem Untergrund den Strom auch induktiv über eine Spule L zuleiten. Diese induziert im Untergrund eine elektrische Strömung und diese Strömung wirkt auf den Geberkreis wieder zurück. Dies ist in Abb. 5 dargestellt. Links sehen wir die Anordnung mit der Spule L , rechts das zugehörige Ersatzschema. Es ist physikalisch vollkommen klar, daß jede Änderung des Widerstandes R_g und auch der Kopplung den im Primärkreis fließenden Strom verändert. Solche Geräte verwendet man besonders zum Aufsuchen von Leitungen und anderen sehr gut leitenden Einlagerungen.

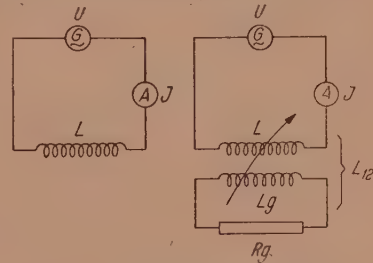


Abb. 5. Induktionsverfahren.

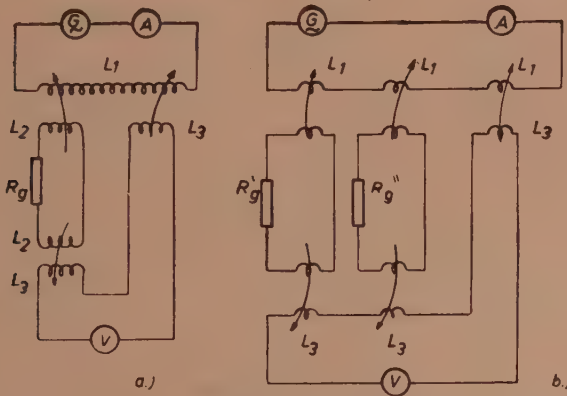


Abb. 6. Ringsendeverfahren.

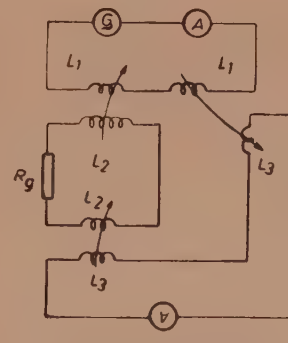


Abb. 7. Dipolverfahren.

Das sog. Ringsendeverfahren unterscheidet sich von dem eben besprochenen dadurch, daß Stromzuführungskreis und Meßkreis getrennt sind. Der Strom wird dem Boden induktiv, und zwar über eine Ringschleife von großem Durchmesser zugeführt. Das erzeugte Feld wird mit einem Rahmen vermessen. Schematisch ist dieses Verfahren in Abb. 6 dargestellt. L_1 ist der Sendering und L_3 der Meßrahmen. Der Meßrahmen ist sowohl mit dem Untergrund als auch mit dem Ring L_1 induktiv

gekoppelt. Es werden also in ihm direkt vom Sendering und indirekt über die im Untergrund vorhandenen Leiter Ströme induziert. Im Ersatzschema ist diese doppelte Kopplung berücksichtigt. R_g ist der Widerstand der geologischen Leiter. Über inhomogenem Untergrund gilt das in Abb. 6b dargestellte Ersatzschema. Es sind im Untergrunde zwei Strombahnen R_g' und R_g'' angedeutet. Man mißt wieder Stärke und Richtung des induzierten Feldes. Jede inhomogene Einlagerung wird die Feldstärke und Richtung des Feldes verändern.

Das in Abb. 7 dargestellte Dipolverfahren ist vom Ringsendeverfahren dadurch unterschieden, daß die Kopplung zwischen dem Meßrahmen und der Sendeschleife sehr lose ist. Um dies zu erreichen, muß man den Meßrahmen in genügender Entfernung vom Senderahmen aufstellen. Die Kopplung $L_1 \dots L_3 \dots$ ist dann sehr lose.

In Abb. 8a ist das Zentralinduktionsverfahren zu sehen. Es ist dem Ringsendeverfahren ähnlich, jedoch wird bei diesem Verfahren der Durchmesser der Sendeschleife

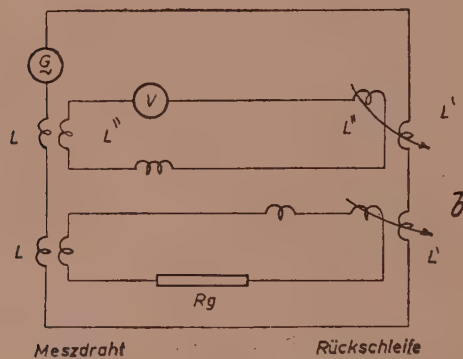


Abb. 8a. Zentralinduktionsverfahren.

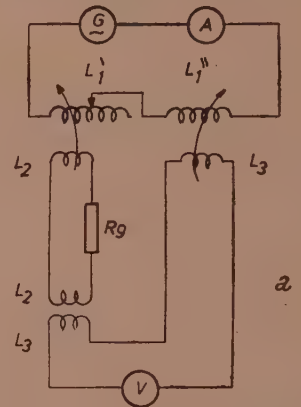


Abb. 8b. Lineardrahtverfahren.

geändert. Damit ändert sich aber auch die Selbstinduktion der Sendeschleife und die Kopplung mit dem stets gleich großen Meßrahmen L_3 .

Man kann schließlich die Sendeschleife durch einen geraden Draht ersetzen, dessen Anfang mit der Stromquelle verbunden ist, während sein Ende über eine Rückschleife wieder zur Stromquelle zurückführt. Diese Schleife wird im weiten Bogen ausgelegt, so daß sie im Meßrahmen keine nennenswerten Ströme induziert. Das Ersatzschema zeigt Abb. 8b. Die Kopplung zwischen dem Meßrahmen L'' und der Rückschleife L' ist extrem lose.

Die Meßmethodik bei all diesen besprochenen Verfahren ist stets die gleiche. Der Meßrahmen wird an jenen Stellen aufgestellt, an denen der Untergrund elektrisch untersucht werden soll und es wird dann die induzierte Feldstärke und die Richtung des Feldes bestimmt.

4. Hochfrequenzverfahren.

Viele der bereits besprochenen Niederfrequenzverfahren lassen sich auch für Hochfrequenz einrichten. Dies trifft besonders für die schon besprochenen Widerstandsverfahren zu. Meist verwendet man jedoch für die Zwecke der Funkmutung eigene Verfahren, die nicht der angewandten Geophysik, sondern der Radiotechnik entnommen sind. Die Meßtechnik der Funkmutung ist heute bereits sehr umfangreich und oft auch kompliziert. Ich kann an dieser Stelle natürlich nur wenige prinzipiell wichtige Verfahren kurz besprechen.

Man unterscheidet die Widerstandsverfahren von den Ausbreitungsverfahren. Mit jenen bestimmt man, wie schon der Name verrät, den Widerstand des Untergrundes.

Sie sind daher dem niederfrequenten Widerstandsverfahren ähnlich, nur werden häufig Meßkreis und Untergrund nicht galvanisch oder induktiv, sondern kapazitiv durch Meßantennen gekoppelt. Grundsätzlich anders arbeiten die Ausbreitungsverfahren. Sie bestimmen die Veränderung eines hochfrequenten Hertzschen Feldes durch die geologischen Leiter des Untergrundes.

In Abb. 9 sehen wir das sog. Reißverfahren. Im Anodenkreis einer Röhre liegt der aus $L_a \dots C \dots R$ gebildete Schwingungskreis. Er ist mit dem Gitterkreis L_g induktiv gekoppelt. Verändert man die Kapazität C , so wird dadurch auch der Anodengleichstrom J_a geändert werden. Eine entsprechende Kurve zeigt Abb. 9 rechts. Der Anodengleichstrom bleibt zunächst konstant, fällt aber beim Einsatz der Schwingungen — also bei der Kapazität C' — plötzlich steil ab. Der Kapazitätswert C' ist von der Größe des Widerstandes R abhängig. Man kann somit aus der

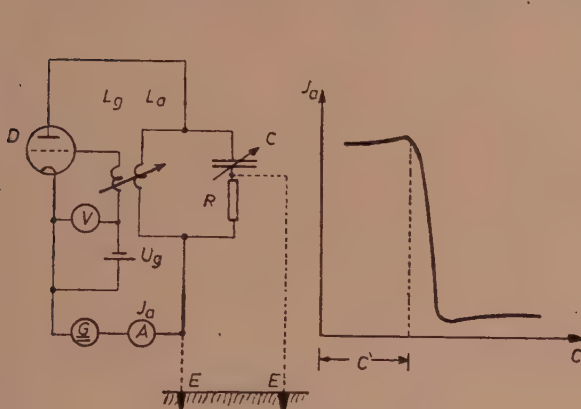


Abb. 9. Reißverfahren.

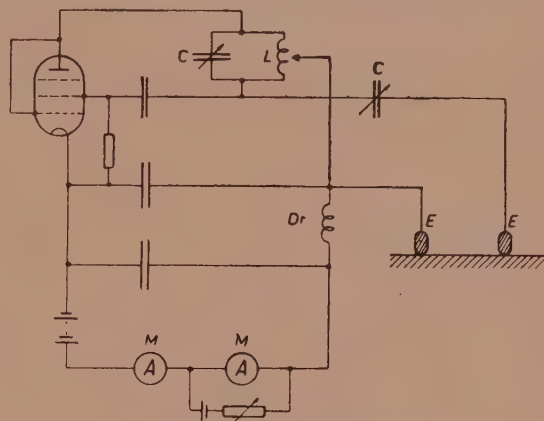


Abb. 10. Absorptionskreis.

Änderung von C' die Änderung des Widerstandes R ermitteln. Außerdem kann man auch kompensieren. Man arbeitet dann mit konstantem C' . Praktisch läßt sich das Verfahren etwa so anwenden, daß an Stelle des Widerstandes R über die punktiert eingezeichneten Leitungen die Meßelectroden E angeschaltet werden. An Stelle der galvanischen Elektroden kann man auch eine Meßantenne verwenden. Man bestimmt dann die sog. Ersatzkapazität der Antenne. Diese ist von den geoelektrischen Eigenschaften des Untergrundes abhängig.

Ein anderes Verfahren zeigt schematisch Abb. 10. Parallel zu einem Teil der Spule L liegen die beiden Elektroden E_1 und E_2 . Die Elektrode E_2 wird vorteilhaft über eine veränderliche Kapazität C' angekoppelt. Der Kondensator C wird so eingestellt, daß das ganze System in der Nähe des Reißpunktes arbeitet. Jede Veränderung des Widerstandes zwischen den Elektroden E wird dann an einer Veränderung des Anodengleichstromes zu erkennen sein. Diesen liest man an den Meßinstrumenten M ab. Parallel zum rechten Gerät liegt ein Kompensationskreis. Es dient der Feinablesung. Geräte dieser Art werden heute schon in der Baugrundforschung eingesetzt.

Wesentlich verschieden von diesen Methoden sind die Ausbreitungsverfahren. Das vom Sender erzeugte Feld ist von der Beschaffenheit des Untergrundes abhängig. Der Winkel, den der elektrische Feldvektor mit der Fortpflanzungsrichtung einschließt, ist um so größer, je besser der Untergrund leitet, bzw. je mächtiger die gutleitenden Schichten sind. Man kann also aus der Größe dieses Winkels auf die elektrische Beschaffenheit des Untergrundes schließen. Die Messung ist verschieden möglich. Zunächst kann man die Sende- und Empfangsspule fest anordnen, so daß der von beiden Rahmenachsen eingeschlossene Winkel konstant bleibt. Wird dieser Winkel

$\varphi = 90^\circ$, so wird bei sehr gut leitendem Untergrund in der Empfangsspule überhaupt keine Spannung induziert. Ändert sich jedoch die Richtung des Feldes, so wird in der Empfangsspule eine Spannung induziert, die an dem angeschlossenen Meßinstrument abgelesen werden kann. Der Ausschlag am Meßinstrument ist daher ein Maß für die Neigung des Feldes. Der Abstand zwischen den beiden Spulen ist meist sehr klein. In Deutschland wurden umfangreiche Versuche mit einem Gerät durchgeführt, das den Namen „Geoskop“ führt. Bei diesem ist der Abstand kleiner als ein Meter.

Bei einem amerikanischen Gerät, das Fisher konstruiert hat, sind die beiden Spulen direkt ineinander angeordnet.

An Stelle des Rahmens kann man auch eine Linearantenne verwenden. Von der Antenne führt eine Doppelleitung zum Empfänger. Man mißt meist durch Kompensation. Die Antenne wird so eingestellt, daß der Empfang ein Minimum wird. Das Verfahren wurde von Großkopf und Vogt ausgebaut und wird heute bereits praktisch eingesetzt.

5. Impulsverfahren.

Bei den Impulsverfahren wird eine Stromquelle, die entweder einen rein sinusförmigen Wechselstrom oder einen Impuls von bekannter Kurvenform erzeugt, mit dem Untergrunde verbunden. Infolge der imaginären Komponente der geologischen Leiter wird die Kurve verformt. Man bestimmt die Verformung, indem man in den Kreis eine Braunsche Röhre einschaltet und das Schirmbild aufnimmt. Die Verformung dieser Kurve gestattet Rückschlüsse auf die elektrische Beschaffenheit des Untergrundes.

6. Auswertung.

Da die physikalischen Voraussetzungen bei allen Verfahren wohlbekannt sind, so besteht grundsätzlich die Möglichkeit, die erhaltenen Resultate mathematisch auszuwerten. Man kann geologische Leiter von jenen elektrischen Eigenschaften ermitteln, die das elektrische Meßergebnis verständlich machen. Tatsächlich werden solche Berechnungen auch ausgeführt. Der natürliche Untergrund zeigt aber im allgemeinen leider eine sehr unregelmäßige Struktur. Bei der mathematischen Auswertung ist man stets gezwungen, die Voraussetzungen weitgehend zu idealisieren. Man hat heute genaue Rechnungen für den homogenen und für den regelmäßig geschichteten Untergrund durchgeführt. In einzelnen Fällen ist es möglich, diese Untersuchungen auch praktisch auszuwerten. Bei regelmäßiger Schichtung kann man z. B. die Mächtigkeit der betreffenden Schichten mit einer gewissen Genauigkeit berechnen. Im allgemeinen darf man jedoch den Wert der mathematischen Auswertung heute noch keineswegs überschätzen. Es ist oft am günstigsten, die erhaltenen Meßgrößen einfach als geophysikalische Bestimmungsstücke zu betrachten und aus ihnen durch Vergleich mit schon bekannten Messungen auf die Struktur des Untergrundes zu schließen.

7. Fehlerquellen.

Besondere Berücksichtigung verdienen stets die verschiedenen Fehlerquellen. Die apparativen kann man meist vernachlässigen. Die Meßgenauigkeit moderner Geräte ist meist so groß, daß man sie gar nicht mehr voll ausnützen kann. Natürlich darf man nie vergessen, daß es sich stets um Präzisionsmessungen handelt und daß daher die Geräte besonders sorgfältig gebaut sein müssen. Auch sind z. B. Spannungsschwankungen nur innerhalb sehr geringer Grenzen zulässig. Man muß weiter beachten, daß die Geräte oft unter sehr ungünstigen Voraussetzungen eingesetzt werden müssen. Sie sind daher so zu bauen, daß mechanische Erschütterungen und Temperaturschwankungen ohne Einfluß bleiben.

Viel schwieriger ist es, jene Fehler zu erkennen, die durch unbekannte Inhomogenitäten im Untergrund und durch schwer kontrollierbare Veränderungen seiner elektrischen Eigenschaften bedingt sind. So können z. B. Temperaturänderungen, Sonnenbestrahlung, Niederschläge und vieles andere mehr ganz bedeutende Widerstands- und DK-Schwankungen hervorrufen. Meist wird man daher Vergleichsmessungen durchführen müssen, um diese Einflüsse zu isolieren. Die richtige Einschätzung der Fehler erfordert meist große Erfahrung.

8. Untersuchung von Wasservorkommen.

Man kann sowohl Grund- als auch Spaltenwasser geoelektrisch nachweisen. Eine richtig gemessene Kurve zeigt niemals irgendwelche Unstetigkeiten, sondern verläuft stetig. Zunächst müssen wir eine solche Kurve, wie sie in einem Beispiel Abb. 11 zeigt, analysieren. Jede Zunahme oder Abnahme des scheinbaren Bodenwiderstandes ist an einer Änderung des Kurvenverlaufs zu erkennen. In unserem Beispiele sehen

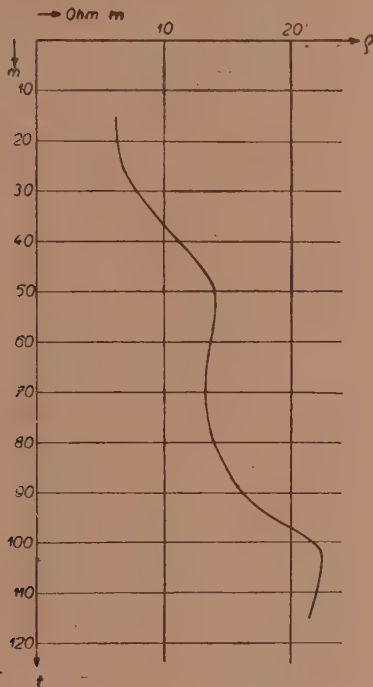


Abb. 11. Scheinbarer Bodenwiderstand.

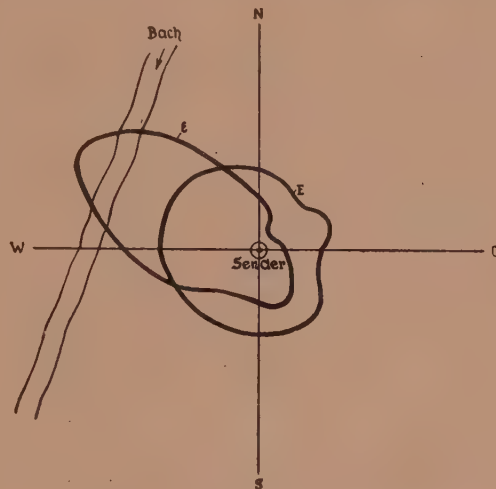


Abb. 12. Ausbreitungsdiagramm.

wir, daß in ungefähr 45 m Teufe die Kurve zunächst verflacht und in 50 m Teufe sogar die Tendenz ändert. Dies deutet auf eine gutleitende Schicht in dieser Teufe hin. In 70 m Teufe finden wir dann den umgekehrten Verlauf, was wieder den Übergang in eine schlechtleitende Schicht anzeigt. Wenn wir an vielen nebeneinander liegenden Punkten die Widerstände messen, so erhalten wir ein elektrisches Profil.

Neben den niederfrequenten Verfahren wird auch die Funkmutung zur Wassersuche herangezogen. In Abb. 12 ist ein Diagramm gezeichnet, das nach dem besprochenen Verfahren von Großkopf und Vogt aufgenommen wurde. Wie bereits erwähnt, ist die Ausbreitung des Feldes von der Leitfähigkeit und DK des Untergrundes abhängig. Man kann daher z. B. aus den Messungen die scheinbare DK des Untergrundes berechnen und diese, wie dies die Abbildung zeigt, im Polardiagramm darstellen (ϵ). In der Darstellung ist auch die Feldstärkekurve (E) eingetragen. Man sieht, daß beide durch den Bach stark verformt werden. Die Verformung ist in diesem Falle aber nicht nur durch das Oberflächenwasser des Baches, das im allgemeinen schlecht leitet, bedingt, sondern meist durch die dem Wasserlaufe parallel strömenden

Grundwässer. Fließen diese aber in anderer Richtung, so wird auch das Diagramm anders verformt. Dadurch ist es zu erklären, daß mitunter die Diagramme ganz anders verformt werden, als dies der Verlauf der obertägigen Wasservorkommen erwarten ließe.

Spaltenwasser kann man mit gutem Erfolge sowohl durch Funkmutung als auch mit niederfrequenten Verfahren nachweisen. Ein Beispiel zeigt Abb. 13. Es wurde

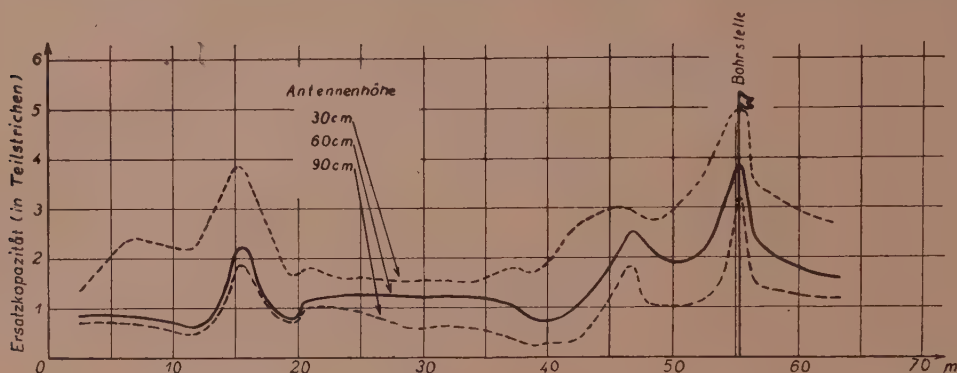


Abb. 13. Nachweis einer wasserführenden Spalte.

mit der Ersatzkapazitätsmethode, also einem Widerstandsverfahren der Funkmutung, gearbeitet. Es sind Kurven für drei verschiedene Antennenhöhen eingezeichnet. Bei 55 m ist ein deutliches Maximum zu konstatieren. Daher wurde auch dort die Bohrung angesetzt. Diese durchfuhr dann wirklich eine wasserführende Spalte, die einer Molkerei genügend Wasser liefern konnte. Die Messung wurde im Urgesteine der Böhmischemährischen Höhe, also in einem sehr schwierigen Gelände, vorgenommen.

9. Untersuchung von Schwimmsanden.

Der Nachweis von Schwimmsanden, besonders in gestörtem Gebirge, ist meist recht schwierig. Rein mechanisches Sondieren kann mitunter zu sehr gefährlichen Fehlschlüssen führen. Man hat daher

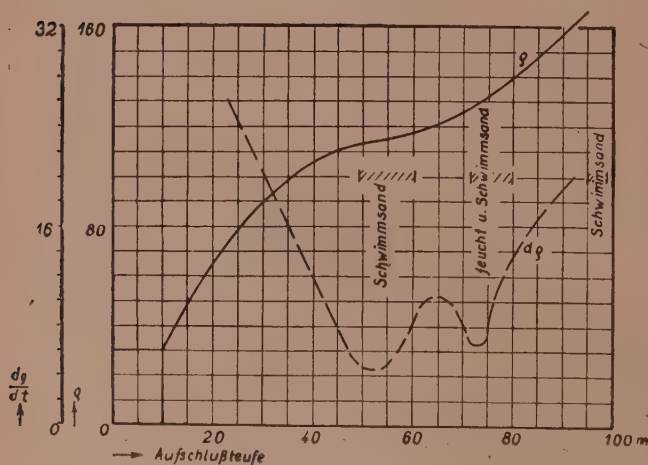


Abb. 14. Nachweis eines Schwimmsandvorkommens.

auch hier in den letzten Jahren geoelektrische Verfahren eingesetzt. Der geoelektrische Nachweis ist möglich, weil der Schwimmsand meist von den Hangend- und Liegendschichten durch eine höhere Leitfähigkeit und DK unterschieden ist. In Abb. 14 sehen wir ein im Brüxer Revier aufgenommenes Diagramm. Neben der Widerstandskurve ist noch eine Differentialkurve eingezeichnet, die die Änderung des scheinbaren Bodenwiderstandes mit der Teufe darstellt. Diese kann, wie die Abbildung zeigt, mitunter ein übersichtlicheres Bild bieten als die Widerstandskurve. Solche Untersuchungen wurden bis zu Teufen von ungefähr 140 m mit gutem Erfolge durchgeführt. Die größtmögliche Aufschlußtiefe ist allerdings von den Überdeckungsverhältnissen abhängig. Sondiert man an möglichst vielen, nebeneinander liegenden Punkten, so erhält man elektrische Profile.

Alle diese Verfahren arbeiten integrativ. Die elektrischen Profile werden sich also von jenen, die durch Auswertung der Bohrungen gezeichnet wurden, unterscheiden. Praktisch ist dies aber ein Vorteil, denn es kommen deshalb kleine und daher bedeutungslose Schwimmsandlinsen im elektrischen Profil nicht zum Ausdruck, während größere Vorkommen klar zu erkennen sind. Auch dann, wenn sie dort, wo sie zufällig vom Bohrloch durchfahren wurden, nur wenig mächtig sind.

Neben den Niederfrequenzverfahren werden in Ausnahmefällen auch Verfahren der Funkmutung eingesetzt.

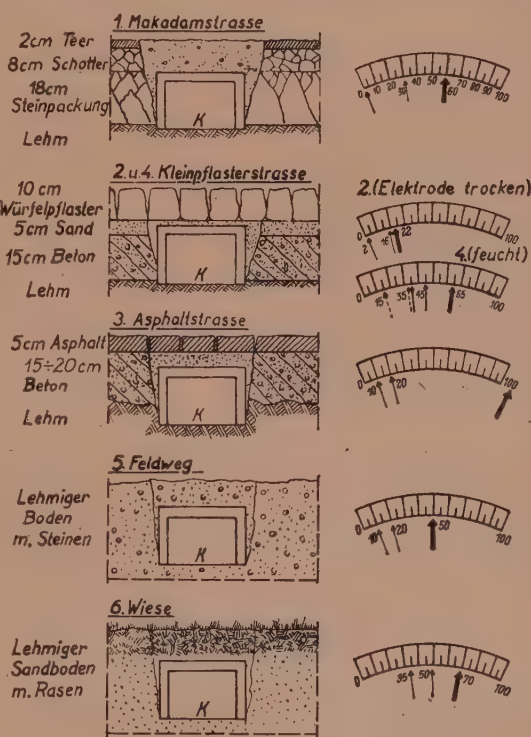
10. Untersuchung von Hohlräumen.

In der Höhlenforschung wird die angewandte Geoelektrik schon seit Jahren verwendet. Sowohl niederfrequente Verfahren als auch solche der Funkmutung konnten in brauchbarer Weise Karsthöhlen aufschließen. Außerdem aber wird die Geoelektrik auch zum Nachweise kleiner Hohlräume verwendet, wie z. B. alter Grubenbaue, die in den Grubenrissen nicht oder unrichtig eingezeichnet sind. Im Braunkohlenbergbau ist man aus wirtschaftlichen Gründen vielfach vom Grubenbau zum Tagbau mit Großraumgeräten übergegangen. Die schweren Bagger brechen aber leicht ein, wenn sie alte Baue, die in geringer Teufe liegen, überfahren und es gibt dann empfindliche und kostspielige Betriebsstörungen. Man hat daher in einzelnen Revieren systematische Versuche mit geoelektrischen Verfahren unternommen. Diese sollen das Gebiet, das das Gerät überfahren soll, vorher untersuchen. Geophysikalisch ist es von wesentlicher Bedeutung, daß fast stets über dem alten Grubenbau noch eine Störungszone liegt, die sich geoelektrisch von den benachbarten Bodenschichten deutlich unterscheidet. Dadurch wird dort, wo der direkte Nachweis nicht zum Ziele führen kann, oft ein indirekter Nachweis möglich. Mit geoelektrischen Verfahren ist es auch möglich, verschüttete Pingen nachzuweisen.

11. Untersuchung von Baugründen.

Für die Baugrundforschung sind besonders die Verfahren der Funkmutung geeignet. Aus Gründen, die hier nicht näher besprochen werden können, sind besonders Verfahren für hohe Frequenzen geeignet. Man arbeitet oft im Bereiche der Meterwellen.

In Abb. 15 sehen wir die Indikationen über Straßendecken, unter denen kleine Holzkästchen eingegraben sind. Da der Untergrund von Straßen meist sehr trocken ist, so ist sowohl seine Leitfähigkeit als auch seine DK nur gering. Isolierte Einschlüsse sind daher recht schwer nachzuweisen. Außerdem ist jeder Straßenunterbau, vom elektrischen Standpunkt aus betrachtet, recht inhomogen. Die normalen Schwankungen der Leitfähigkeit und DK sind daher recht groß. Trotzdem gelingt aber der Nachweis in vielen Fällen sehr gut. Neben den Querschnitten sind die dazugehörigen Skalen-



bilder zu sehen. Die beiden schwachgezeichneten Zeigerstellungen begrenzen jenen Bereich, innerhalb dessen die normale Anzeige schwankt. Der stark ausgezogene Zeiger zeigt dagegen den Ausschlag über dem kleinen Holzkästchen. Nur in der trockenen Kleinpflasterstraße ist dieser undeutlich. Sonst ist er deutlich ausgeprägt.

In gleicher Weise kann man auch Hohlräume nachweisen, die unter einer Betondecke durch das Absetzen des aufgeschütteten Erdreiches entstanden sind. So konnten die gefährlichen Aushöhlungen in der Nähe von Widerlagern von Brücken deutlich nachgewiesen werden.

12. Untersuchung von Lagerstätten.

Seichte Lagerstätten können direkt untersucht werden, wenn sich die Lagerstätte vom Nebengestein ausreichend elektrisch unterscheidet. Dies wird aber viel seltener

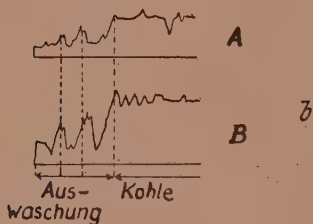
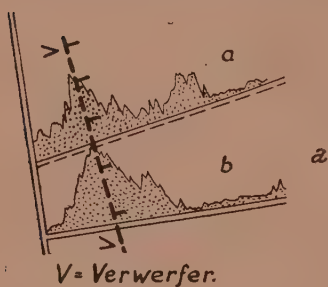


Abb. 16.

der Fall sein als es der Laie anzunehmen pflegt. Die meisten Erze sind recht schlechte Leiter, auch Kohle leitet schlecht. Nur wenige Erzlagerstätten haben besonders hohe Leitfähigkeit. Unter diesen Voraussetzungen ist der Nachweis von Lagerstätten oft nur indirekt möglich. Der Geoelektriker liefert den Geologen Unterlagen über die Tektonik des Gebirges, über den Verlauf wichtiger Störungszonen und Kontakte. Dies erlaubt dem praktischen Geologen jene Zonen einzugrenzen, die wahrscheinlich erzfündig sind.

Die geoelektrischen Verfahren scheinen besonders für den Nachweis von Störungszonen geeignet zu sein. Es ist interessant, daß auch die Verfahren der Funkmutung, deren direkte Aufschlußteufe wegen der hohen Frequenzen geringer sein muß als jene der niederfrequenten Verfahren, mitunter noch tief liegende Störungszonen nachzuweisen gestatten. Dieser Effekt, die sog. „indirekte Anzeige“, ist bisher noch keineswegs geklärt.

Zwei Geoskopkurven zeigt Abb. 16. Die Geoskopanzeige ist, wie wir bereits gehört haben, ein Maß für den Winkel, den das Feld mit der Horizontalen einschließt.

Meist verzichtet man auf eine rechnerische Auswertung der Kurve und betrachtet diese einfach als Bestimmungselement, das nach den gesammelten Erfahrungen ausgewertet wird. Es gibt heute bereits viele tausende solcher Kurven. Neuerdings wird allerdings auch eine rechnerische Auswertung — natürlich im Rahmen des möglichen — angestrebt.

13. Untersuchung des Gasgehaltes von Kalilagerstätten.

Häufig enthalten Kalilagerstätten Gaseinschlüsse. Besonders gefährlich sind Kohlensäureeinschlüsse, die unter sehr hohem Druck stehen. Werden solche angebohrt, so explodieren sie und verschulden meist sehr schwere Grubenkatastrophen.

Der Nachweis solcher Einschlüsse ist nur durch Funkmutung möglich, da Kali ein guter Isolator ist. Es wird mit Hilfe einer Kapazitätsmethode die Verringerung der DK gemessen, die der Gaseinschluß bedingt. Es gelang in den Werragruben, solche Einschlüsse brauchbar nachzuweisen.

Zur Zeit laufen Versuche, um Gaseinschlüsse in Kohlelagerstätten nachzuweisen. Auch in diesen wird durch das Gas die DK herabgesetzt.

Laugeneinschlüsse in Kalilagern sind stets an einer starken Zunahme der DK zu erkennen.

14. Blitzerdermessungen.

Die Güte jeder Blitzschutzeinrichtung ist stets durch die Güte des verwendeten Erders festgelegt. Der Erder hat die Aufgabe, die technischen Leiter der Blitzschutzanlage mit den geologischen Leitern des Untergrundes elektrisch zu verbinden. Seine Güte ist daher von geoelektrischen Faktoren abhängig und seine Untersuchung ist daher auch eine Aufgabe der angewandten Geoelektrik.

Der gesamte Ausbreitungswiderstand eines Erders besteht aus dem Übergangs-, Bettungs- und Gebirgswiderstand. Die beiden ersten lassen sich durch technische Mittel in bestimmten Grenzen halten. Der Gebirgswiderstand dagegen ist naturgegeben. Da die Erder meist in den oberflächennahen Schichten eingegraben sind, so schwankt ihr Widerstand mit der Witterung. Diese Schwankungen wurden in den letzten Jahren genauer untersucht. In Abb. 17 ist die jahreszeitliche Änderung des Erderausbreitungswiderstandes am Versuchsfeld Absroth dargestellt. Der Erder war in einer Spalte verlegt, und zwar in sehr stark gestörtem altem Gebirge. Das Widerstandsmaximum fällt in den Winter, das Minimum in den Herbst.

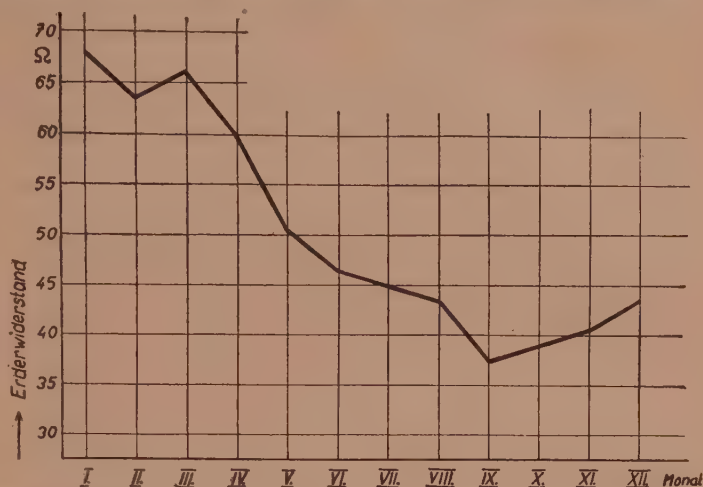


Abb. 17. Jahreszeitliche Widerstandsmessung.

Da der Blitzstrom einen Erder ganz ähnlich beansprucht wie ein hochfrequenter Wechselstrom, so werden jetzt auch zur Überprüfung Funkmutungsgeräte herangezogen. In Abb. 18 sehen wir Ergebnisse, die mit Niederfrequenz und Hochfrequenz von ca. 10^5 Hertz erzielt wurden, einander gegenübergestellt. Es handelt sich um die Vermessung von Stab-erdern verschiedenen Profils, die senkrecht in den Boden eingesteckt sind. Auf der Ordinate ist der Widerstand in Prozenten und auf der Abszisse die Eingrabbtiefe aufgetragen. Man sieht, daß bei Hochfrequenz der Rückgang des

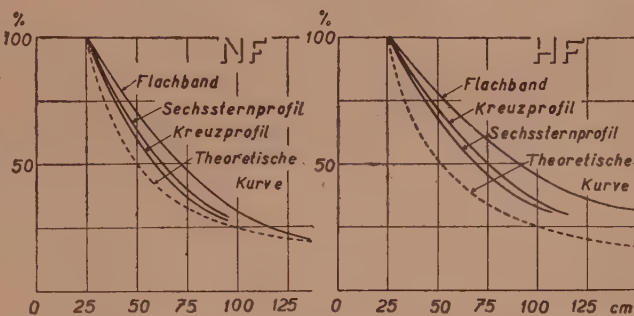


Abb. 18. Vermessung von Erdern mit Hochfrequenz.

Widerstandes ein anderer ist als bei Niederfrequenz. Es sind daher die Oberflächenerder gegenüber den Tieferdern zu bevorzugen. Die eingezeichnete „theoretische Kurve“ bezieht sich auf Meßströme ganz geringer Frequenz. Durch die Einführung der Funkmutung in die Blitzschutztechnik konnten in mancher Richtung völlig neue Wege erschlossen werden.

Diese Zusammenfassung kann natürlich nur einen sehr oberflächlichen Überblick über das Gebiet der angewandten Geoelektrik bieten. Immerhin dürfte sie zeigen, daß dieser Zweig der angewandten Geophysik heute nicht nur wissenschaftlich inter-

essant, sondern auch wirtschaftlich sehr bedeutungsvoll ist, so daß seine Einführung auf den verschiedensten Gebieten von großem Nutzen sein wird. Um der österreichischen Wirtschaft die Möglichkeit zu bieten, die Vorteile dieser Verfahren kennenzulernen und um anderseits auch Verfahren, die besonders für Österreich wichtig sind, entsprechend auszubauen, wurden bereits am Institute für Schwachstromtechnik der Wiener Technischen Hochschule (Vorstand Hofrat Professor Dr. Petritsch) eigene Laboratorien für Geoelektrik, angewandte Radiotechnik und Funkgeologie errichtet, die mit entsprechenden Geräten ausgestattet sind und auch ein recht umfangreiches Erfahrungsmaterial zur Verfügung haben. Diese Forschungsabteilung wird auch den Nachbarstaaten ihre Verfahren und Erfahrungen gerne zur Verfügung stellen.

Literatur:

a) Arbeiten fremder Autoren.

(A = Allgemeines, N = Gleichstrom- und Niederfrequenzverfahren, H = Hochfrequenzverfahren.)

Ambronn, R.: *Int. Bergwirtsch. Bergtechn.* **2**, 217 (1927) (A). — Ambronn, R.: *Wiss. Forschg. (Naturwiss. Reihe)* **15**, 5 (1928) (A). — Belluigi, A.: *Beitr. angew. Geophys.* **7** (1939) (N). — Börner, R.: *Glückauf* **76**, 261 (1940) (H). — Doborzynski, D.: *Hochfrequenztechn. u. E.-A.* **47**, 12 (1936) (H). — Geyger, W.: *Jb. drahtl. Telegr. u. Teleph.* Nr. 6 (1929) (N). — Großkopf, J. u. Vogt, K.: *Telegr.- u. Fernspr.-Techn.* **29**, 164 (1940) (H). — Großkopf, J. u. Vogt, K.: *Hochfrequenztechn. u. E.-A.* **58**, 52 (1941) (H). — Großkopf, J. u. Vogt, K.: *Hochfrequenztechn. u. E.-A.* **62**, 14 (1943) (H). — Heine, W.: *Elektrische Bodenforschung*. Berlin. 1928 (A). — Heine, W.: *FTM.* Nr. 10, 305 (1938) (H). — Henney, K. A.: *Techn. Mitt. d. Studienges. f. Höchstspannungsanl.* Nr. 69 (1935) (N). — Hummel, J. N.: *Z. Geophysik* **5**, Nr. 3/4, 89 u. 104 (1929) (H). — Hummel, J. N.: *Öl u. Kohle* **37**, 91 (1940) (N). — Hummel, J. N.: *Beitr. angew. Geophysik* **5**, 32 (1935) (N). — Hummel, J. N. u. Rülke, O.: *Beitr. angew. Geophysik* **6**, 89 (1936) (N). — Hummel, J. N. u. Rülke, O.: *Beitr. angew. Geophysik* **6**, 265 (1937) (N). — Khastgir, S. R. u. Chakravarty, M. K.: *Ind. J. Physics* **12**, Nr. 4, 289 (1938) (H). — Koenigsberger, J. G.: *Beitr. angew. Geophysik* **3**, 463 (1933) (N). — Koenigsberger, J. G.: *Erg.-H. angew. Geophysik* **3**, 392 (1933) (N). — Koenigsberger, J. G.: *Beitr. angew. Geophysik* **4**, 201 (1934) (N). — Koenigsberger, J. G.: *Beitr. angew. Geophysik* **7**, 119 (1937) (N). — Löwy, H.: *Philos. Mag.* **27**, 576 (1939) (H). — Löwy, H.: *Philos. Mag.* **29**, 32 (1940) (H). — Löwy, H.: *Terrestr. Magnet. and Atmospheric Electricity* **45**, 149 (1940) (H). — Müller, M.: *Gerlands Beitr. Geophys.* **21**, 234 (1929) (N). — Müller, M.: *Z. Geophysik* **5**, Nr. 8 (1929) (H). — Müller, M.: *Z. Geophysik* **18**, 59 (1943) (H). — Petrovsky, A.: *Erg.-H. angew. Geophysik* **3**, Nr. 2, 149 (1933) (H). — Reich, H.: *Handb. d. Exp.-Phys.* **25**, III. Akadem. Verlagsges. 1933 (A). — Reich, H.: *Beitr. angew. Geophysik* **3**, Nr. 2 (1933) (N). — Schlumberger, C.: *The Science of Petroleum* **1** (1938), Oxford (N). — Smith-Rose, R. L.: *Proc. Roy. Soc., Lond.* (A) **140**, 359 (1933) (H). — Stern, W.: *Gerlands Beitr. Geophys.* **23**, 292 (1929) (H). — Stern, W.: *Z. Geophysik* **7**, 166 (1931) (H). — Stern, W.: *Gerlands Beitr. Geophys.* **1**, 437 (1931) (H). — Sundberg, K., Lundberg, H. u. Eklund, J.: *Sveriges Geol. Unders., Serie C*, Nr. 327 (1925) (N). — Sundberg, K. u. Nordström, A.: *Amer. Inst. min. metallurg. Engr. Techn. Publ.* **122** (1928) (A).

b) Eigene Publikationen.

Die Messung der Antennenersatzkapazität in der Funkmutung. *Z. Geophysik* **14**, Nr. 3/4, 93 (1938). — Einiges über den Aufbau und die Eigenschaften geologischer Leiter. *Erg. kosm. Physik* **219** (1939). — Grundzüge der Funkgeologie. Buch-Sammlung Nr. 116. Braunschweig: Verlag Vieweg. 1939. — Der Einfluß des Wassergehaltes geologischer Leiter auf deren elektrische Eigenschaften. *S. M. P. G.* **19**, Nr. 1, 224 (1939). — Gletscherdicken-Messungen mittels Funkmutung. *Wasserkr. u. Wasserwirtsch.* **35**, Nr. 2, 25 (1940). — Die Aufgaben der Funkgeologie I u. II. *Naturwiss.* **28**, Nr. 26, 405; Nr. 27, 423 (1940). — Zur Frage des Widerstandes von Blitzableitererdern in gebirgigem Gelände. *Elektrotechn. Z.* **61**, Nr. 32, 739 (1940). — Die Bestimmung von Erderwiderständen mit hochfrequenten Meßströmen. *Hochfrequenztechn. u. E.-A.* **56**, Nr. 2, 54 (1940). — Elektrische Messung kleinster Grundwassergeschwindigkeiten. *Gas- u. Wasserfach* **83**, Nr. 39, 481—485 (1940). — Die funkgeologische Untersuchung des Zinnobervorkommens

von Schönbach bei Eger. Neues Jb. f. Mineralogie 84, Abt. B, 90—116 (1940). — Einiges über die Untersuchung der geoelektrischen Blitzgefährdung. Gerlands Beitr. Geophys. 57, 65—108 (1940). — Die Möglichkeit einer geoelektrischen Fehlmutung, mit besonderer Berücksichtigung der bei der Funkmutung gegebenen Voraussetzungen. Elektr. im Bergb. 16, Nr. 3, 37—43 (1941). — La smorzamento delle onde Hertziane attraverso i conduttori geologici. Geofisica pura e applicata 4, Nr. 1, 15—37 (1942). — und Heinrich Forejt: Nachweis steil einfallender elektrischer Diskontinuitätsflächen im Untergrunde durch Funkmutung. Hochfrequenztechn. u. E.-A. 59, Nr. 2, 41—45 (1942). — und Heinrich Forejt: Die Anwendung des Druckindikators in der Funkmutung. Z. Geophysik 17, Nr. 5/6, 217—225 (1941/42). — Die Aussichten der Reflexionsmethode in der Funkmutung. Glückauf 79, Nr. 27/28, 336—340 (1943). — Wassersuche durch Funkmutung. Wasserkr. u. Wasserwirtsch. 38, Nr. 9, 209—215 (1943). — Mitteilung über die im Blitzversuchsfeld Absroth im Jahre 1941 durchgeführten Arbeiten. Gerlands Beitr. Geophys. 59, Nr. 3/4, 306—330 (1943). — Nachweis von Schwimmsandvorkommen durch geoelektrische Verfahren. I. Teil. Braunkohle 44, Nr. 1/2, 6—9 (1945). — Einiges über den Blitzschutz besonders gefährdeter Objekte. Z. ges. Schieß- u. Sprengstoffwes. 39, Nr. 7, 8, 9, 101—108 (1944). — Meßverfahren der Funkmutung. München: Verlag Oldenbourg. 1943.

(Eingegangen am 7. März 1946.)

Grundzüge einer Algebra der elektrischen Schaltungen.

Von O. Plechl und A. Duschek, Wien.

Mit 29 Textabbildungen.

Übersicht.

Die vorliegende Arbeit zeigt die Möglichkeit einer rechnerischen Behandlung der elektrischen Schaltungen, die allerdings erst die Entwicklung eines im wesentlichen völlig neuen algebraischen Kalküls erfordert. Nach einer Definition der Grundbegriffe in 1. werden die Grundlagen des Kalküls dargestellt und an Beispielen erläutert. Zum Schluß (11.) wird noch auf den Zusammenhang mit dem Aussagenkalkül der algebraischen Logik eingegangen.

Elektrische Schaltungen sind die Verbindungsglieder zwischen Stromquellen und Verbrauchern, worunter wir alle elektrischen Maschinen und Apparate verstehen, in welchen eine Energieumwandlung stattfindet. Die Aufgabe der Schaltung ist es, gewisse Gruppen von Verbrauchern an gewisse Gruppen von Stromquellen anzuschließen oder sie von diesen abzuschalten, d. h. also, gewisse Strompfade herzustellen oder zu unterbrechen. Die Strompfade müssen vorgeschrieben sein, mitunter ist auch vorgeschrieben, daß die Herstellung oder Lösung der Strompfade von bestimmten verschiedenen Stellen aus zu erfolgen hat. Ein einfaches Beispiel hierfür ist die Wechselschaltung, bei der ein Verbraucher (Glühlampe) von zwei oder mehr verschiedenen Stellen aus ein- oder ausgeschaltet werden kann. Aus diesen Schaltbedingungen, die den gegebenen Ausgangspunkt bilden, hat dann der Konstrukteur die Schaltung selbst, d. h. ihre graphische Darstellung, das Schaltbild zu ermitteln. Der Weg dazu bestand bisher ausschließlich im Probieren, wobei natürlich dem Konstrukteur seine mehr oder minder große praktische Erfahrung, seine Routine, zu Hilfe kommt. Irgend eine Systematik, ja auch nur der Ansatz zu einer solchen fehlte bisher vollständig, wenn man von den Ansätzen von Edler¹ und Lischke² absieht, und daher war man

¹ R. Edler: Der Entwurf von Schaltungen und Schaltapparaten (Schaltungstheorie), 2 Bände. Leipzig. 1905 und 1927.

² Lischke: Schaltlehre. Leipzig. 1921.

auch nicht in der Lage zu erkennen, ob eine einmal gefundene Lösung auch die einfachste und zweckmäßigste sei. Meist ist man ja froh, überhaupt eine Lösung der manchmal recht komplizierten Schaltbedingungen zu haben.

Der Gedanke einer mathematischen Behandlung der elektrischen Schaltungen mag fürs erste recht befremdend wirken, da die Möglichkeit eines allgemeinen Ansatzes nicht ohne weiteres erkennbar ist. Nun gibt es zwar ein Gebiet der Mathematik, das sich in eine sehr enge Beziehung zu den Schaltungen bringen läßt, und zwar ist das der Aussagenkalkül der algebraischen Logik. Aber einerseits ist dieser Kalkül selbst vielen Mathematikern und erst recht den Praktikern kaum vom Hörensagen bekannt, andererseits geht das Interesse des Logistikers in einer ganz anderen Richtung als das unsere, so daß der Aussagenkalkül, dessen ganzer Ausbau derzeit überhaupt noch etwas dürftig erscheint, nur wenig mehr als eben die bloße Erkenntnis bringt, daß eine mathematische Theorie der elektrischen Schaltungen überhaupt möglich ist und daß es sich dabei um eine Art Algebra handelt. Wir werden im folgenden diese Algebra der elektrischen Schaltungen unabhängig vom Aussagenkalkül entwickeln und auf den Zusammenhang mit diesem erst zum Schluß kurz eingehen.

Die Hauptschwierigkeit jeder Anwendung der Mathematik liegt im Übergang von dem konkreten, in Worten formulierten physikalischen oder technischen Problem zu seiner mathematischen Fassung, also im mathematischen Ansatz. Dasselbe gilt natürlich auch von der Schaltalgebra, obwohl hier bei gewissen Schaltbedingungen, wenn die Zahl der Schalter vorgeschrieben ist, der mathematische Ansatz ungemein einfach ist. Auf der anderen Seite aber sind dem Schaltungstechniker die einfacheren, mitunter aber auch kompliziertere Schaltungen so geläufig, daß ihm in solchen Fällen die mathematische Behandlung keine Vorteile mehr geben kann. Wir glauben aber doch, daß es verfehlt wäre, die ganze Schaltalgebra von vornherein aus diesem Grunde als überflüssig abzulehnen. Abgesehen davon, daß schon die Möglichkeit einer solchen Disziplin an sich von größtem prinzipiellen Interesse sein dürfte, besteht gar kein Zweifel, daß der Kalkül, wenn man sich einmal mit ihm richtig vertraut gemacht hat, eine wertvolle Bereicherung des mathematischen Rüstzeuges des Elektrotechnikers darstellt und zu durchaus neuen, praktisch wichtigen Gesichtspunkten führt.

Die leitende Idee einer mathematischen Behandlung der Schaltungen, die Erkenntnis ihrer Möglichkeit und die Entwicklung des Kalküls, zunächst für eigene, rein praktische Zwecke stammt ausschließlich von Dr. O. Plechl. Er hat bemerkt, daß man sehr schön mit den Kontakten rechnen kann, wenn man sie mit irgendwelchen Buchstaben a, b, \dots bezeichnet und dann die Parallelschaltung durch $a + b$, die Serienschaltung durch $a \cdot b$ wiedergibt. Etwas ähnliches machen auch Nakasima und Hanzawa,³ die aber die Parallelschaltung mit $a \cdot b$ und die Serienschaltung mit $a + b$ bezeichnen. Das ist natürlich ganz unwesentlich und bedeutet von unserem Standpunkt aus nur, daß an Stelle der Leitwerte die Widerstandswerte der Rechnung zugrunde gelegt werden. Plechl hat weiter die formalen Gesetze der auf diesen beiden Grundoperationen aufgebauten Algebra gefunden und den Kalkül auf die verschiedensten Probleme der Schaltungstechnik angewendet. Die Begriffe Grenzfunktion, Vollform und Kürzung, all das stammt von Plechl, über dessen Gedankengang und Rechenmethoden in mancher Hinsicht die Arbeiten von H. Piesch^{4, 5} besseren Aufschluß geben als die vorliegende, in der der Bearbeiter vor allem durch die grundsätzliche Einführung des Leitwertes einer Admittanz dem ganzen Kalkül eine ein-

³ A. Nakasima und M. Hanzawa: The theory of equivalent transformation of simple partial paths in the relay circuit. Nippon electr. Commun. Engng. 9, 32 (1938).

⁴ H. Piesch: Begriff der allgemeinen Schaltungstechnik. Arch. Elektrotechn. 33, 672 (1937).

⁵ H. Piesch: Über die Vereinfachung von allgemeinen Schaltungen. Arch. Elektrotechn. 33, 672 (1937).

wandfreie, von einer physikalisch meßbaren Größe ausgehende Begründung zu geben versucht hat. In derselben Richtung einer exakten Begründung liegen auch die vom Bearbeiter gegebenen Definitionen der verwendeten Grundbegriffe, von dem auch die Partialbruchzerlegung der Schalteradmittanz in 6., der Nachweis für die Existenz und Eindeutigkeit der reduzierten Form in 8. und die allgemeinen Untersuchungen über das vollständige n -Eck in 9. herrühren. Über den Zusammenhang mit dem Aussagenkalkül war sich bereits Plechl völlig im klaren.

1. Grundbegriffe.

Wir setzen zunächst voraus, daß unsere Schaltungen nur aus idealen Leitern und idealen Isolatoren bestehen, so daß der Leitwert zwischen je zwei Anschlußstellen (Klemmen) der Schaltung stets entweder gleich ∞ (Unendlich) oder gleich 0 (Null) ist, keinesfalls aber andere Werte annehmen kann. Durch zweckmäßige Änderung dieser Leitwerte — aber immer nur zwischen den beiden Werten ∞ und 0 — werden gewisse Strompfade zwischen Stromquellen und Verbrauchern hergestellt oder unterbrochen und damit gewisse Gruppen von Verbrauchern an gewisse Gruppen von Stromquellen angeschlossen oder von diesen abgeschaltet.

Nach dem äußeren Eindruck definieren wir zunächst: Eine Schaltung ist ein Kasten mit mehreren Handgriffen oder Antrieben, deren jeder mindestens zwei verschiedene Stellungen einnehmen kann und mit einer Anzahl Klemmen, an die die Stromquellen oder Verbraucher angeschlossen sind.

Diese Definition sagt gar nichts aus über den inneren Aufbau der Schaltung, also über den Inhalt des Kastens. Wir ergänzen zunächst unsere Definition: Ein Schalter ist eine Schaltung mit einem einzigen Handgriff (Antrieb).

Ein prinzipieller Unterschied zwischen Schaltung und Schalter besteht überhaupt nicht, da man die Antriebe einer Schaltung stets durch einen einzigen Antrieb mit entsprechend vielen Stellungen steuern kann. So kann man z. B. bei einer Schaltung mit drei Antrieben mit je zwei Stellungen diese Antriebe durch einen einzigen Antrieb mit $2^3 = 8$ Stellungen mechanisch oder elektrisch steuern. In praktischer Hinsicht ist jedoch der Unterschied sehr bedeutungsvoll. Abgesehen von der Unübersichtlichkeit solcher Anlagen wird manchmal auch gefordert, gewisse Handgriffe oder Antriebe von ganz verschiedenen Stellen aus betätigen zu können. Ferner wäre es in der Regel schon deshalb ungemein unpraktisch, alle Zustände einer Schaltung von einem einzigen Schalter aus herstellen zu wollen, weil dann mitunter das Durchlaufen sehr vieler Zwischenstellungen nötig wäre, um von einem Zustand in einen anderen zu gelangen, was einen ganz unerträglichen Zeitaufwand erfordern könnte.

Man kann nun sagen, daß jede Schaltung aus Schaltern zusammengesetzt ist, d. h. daß man den einen Kasten der Schaltung durch mehrere Kästen mit je einem Antrieb ersetzen kann, deren Klemmen zum Teil durch Leitungen miteinander verbunden sind. Dazu braucht man jedenfalls gerade so viel Schalter als an dem ursprünglichen Schaltungskasten Antriebe vorhanden waren. Da aber Schalter offenbar immer noch recht komplizierte Dinge sein können, müssen wir, um den Aufbau einer Schaltung richtig beschreiben und studieren zu können, noch wesentlich einfachere Bauelemente angeben.

Diese einfachsten Elemente sind die Kontakte. Darunter verstehen wir einen Schalter mit nur zwei Stellungen und zwei Klemmen, so daß bei der einen Stellung der Leitwert zwischen den beiden Klemmen ∞ , bei der anderen Stellung 0 ist. Jeder Schalter besteht dann aus einer Anzahl von Kontakten, die miteinander mechanisch gekuppelt sind und durch einen gemeinsamen Antrieb derart bestätigt werden, daß bei jeder Stellung des Antriebes gewisse Kontakte geschlossen, die übrigen offen sind.

Kontakte, die bei allen Stellungen des Schalters offen sind, können weggelassen werden, Kontakte, die bei allen Stellungen geschlossen sind, können durch Leitungen ersetzt werden. Kontakte, die stets bei denselben Stellungen geschlossen oder offen sind, nennen wir äquivalent.

Zu dem eben verwendeten Begriff der Leitung wäre noch folgendes zu bemerken. Je zwei Punkte einer Schaltung, die stets dasselbe Potential haben, nennen wir ebenfalls äquivalent; je zwei Punkte einer Leitung haben stets dasselbe Potential und sind daher auch immer äquivalent. Je zwei äquivalente Punkte einer Schaltung können stets durch eine Leitung verbunden werden, ohne an der Wirkungsweise der Schaltung etwas zu ändern. Äquivalente Punkte sehen wir nicht als wesentlich verschieden an, d. h. wenn wir von verschiedenen Punkten sprechen, so sind dabei stets Punkte gemeint, die nicht äquivalent sind.

Beispielsweise sind die beiden Punkte A und B des in Abb. 1 gezeichneten Schalters äquivalent und können also durch eine Leitung verbunden werden; die beiden Punkte C

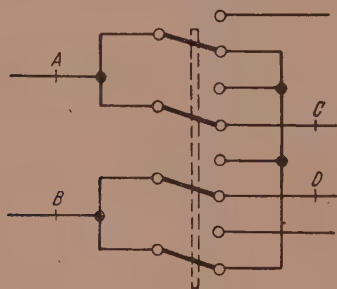


Abb. 1.

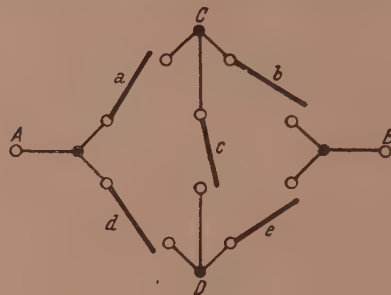


Abb. 2.

und D haben aber nur dann gleiches Potential, wenn der Schalter in der unteren Stellung steht und sind daher nicht äquivalent.

Erwähnt sei noch, daß die Klemmen nichts anderes als willkürlich ausgewählte Punkte einer Schaltung sind, die wir aber der Einfachheit halber stets als voneinander verschieden annehmen wollen. Die Klemmen sind die „äußeren“ Punkte einer Schaltung, die „außen“ am Kasten sichtbar sind. Die anderen Punkte liegen innen.

Wir betrachten nun zwei beliebige Punkte A und B einer Schaltung. Den Teil der Schaltung — es kann natürlich auch die ganze Schaltung selbst sein —, der den Leitwert f zwischen den beiden Punkten A und B bestimmt, nennen wir die Admittanz (AB) der Schaltung und f ihren Wert oder genauer ihren Leitwert. Mitunter verstehen wir unter Admittanz auch den Leitwert selbst, ähnlich wie ja auch die Worte Widerstand, Impedanz, Reaktanz usw. in doppeltem Sinne gebraucht werden und einmal das betreffende Gerät, das andere Mal den Wert des Widerstandes oder der Induktivität bedeuten.

Die Brückenschaltung (Abb. 2) mit fünf einfachen Ausschaltern mit je zwei Stellungen und einem Kontakt a, b, c, d, e enthält vier verschiedene Punkte $ABCD$, von denen zwei, nämlich A und B , als Klemmen ausgezeichnet sind. In dieser Schaltung gibt es sechs Admittanzen, nämlich (AB) , (AC) , (AD) , (BC) , (BD) und (CD) .

2. Die beschreibende Funktion einer Admittanz.

Es sei eine Schaltung allgemeinsten Art vorgelegt mit m Klemmen und s Schaltern, die bzw. $n_1, n_2 \dots n_s$ Stellungen haben. Wir sagen dann, die Schaltung und jede aus ihr zu entnehmende Admittanz sei vom Typus

$$[s; n_1, n_2 \dots n_s].$$

Wir ordnen der k -ten Stellung des i -ten Schalters eine Zahl α_{ik} zu und wählen die $N = n_1 + n_2 + \dots + n_s$ Zahlen α_{ik} alle voneinander verschieden. Ferner ordnen wir jedem Schalter eine Variable zu, und zwar nennen wir die Variable des i -ten Schalters x_i ; diese Variable soll die Werte $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}$ annehmen können und keine anderen, so daß diese Zahlen den Variabilitätsbereich von x_i bilden. Da bestimmte Stellungen der Schalter stets eine bestimmte Leitfähigkeit einer Admittanz (AB) ergeben, die Stellungen der Schalter aber durch die Werte der s Variablen x_i festgelegt sind, wird die Leitfähigkeit oder der Wert L der betrachteten Admittanz eine Funktion

$$L = (AB) = f(x_1, x_2, \dots, x_s) \quad (1)$$

dieser Variablen sein. Wir nennen (1) die beschreibende Funktion der betrachteten Admittanz (AB). Ist die Zahl der Schalter klein, so schreiben wir, wie auch sonst, x statt x_1 , y statt x_2 usw. und demgemäß α_k statt α_{1k} , β_k statt α_{2k} usw.

Mit Funktionen der in (1) dargestellten Art haben wir uns im folgenden zu beschäftigen. Sie haben zwei wichtige und für unsere Untersuchungen wesentliche Eigenschaften:

1. Da sie Leitfähigkeiten von Schaltungen (Admittanzen) darstellen, können sie nur die Werte ∞ und 0 annehmen.

2. Der Variabilitätsbereich jeder der unabhängigen Veränderlichen ist eine endliche Zahlenmenge.

Ist die betrachtete Admittanz nicht einer Schaltung, sondern einem Schalter entnommen, der wegen $s = 1$ (nur ein Antrieb) stets den Typus $[1; n]$ hat, so wird (1) eine Funktion einer Variablen x allein, also

$$L = (AB) = f(x). \quad (1a)$$

Da die Variablen den Schaltern zugeordnet sind, treten natürlich bei allen beschreibenden Funktionen der Admittanzen einer und derselben Schaltung auch dieselben Variablen als Argument auf; die Funktionen selbst werden im allgemeinen voneinander verschieden sein und dementsprechend mit verschiedenen Buchstaben $f, g, \dots, \varphi, \psi, \dots$, oder mit f_1, f_2, \dots usw. oder mit den entsprechenden Großbuchstaben bezeichnet.

Hat eine Schaltung m Klemmen K_1, K_2, \dots, K_m , so ist sie offenbar vollkommen beschrieben durch die Angabe der $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$ Leitfähigkeiten

$$L_{ik} = (K_i, K_k) = f_{ik}(x_1, x_2, \dots, x_s),$$

die zu den sämtlichen Klemmenpaaren K_i, K_k der Schaltung gehören.

Schließlich wollen wir noch übereinkommen, eine Admittanz (AB) mit der Leitfähigkeit (1) oder (1a) stets wie in Abb. 3 darzustellen.

Wir sprechen im folgenden kurz vom „Schalter x “, von der Admittanz f und von der „Stellung i “ (oder α_i) des Schalters x .



Abb. 3.

Wir betrachten eine Admittanz vom Typus $[1; n]$ und es sei z. B. $L = \infty$ für $x = \alpha_i$ ($i = 1, 2, \dots, h$) und $L = 0$ für $x = \alpha_j$ ($j = h + 1, h + 2, \dots, n$).⁶ Dann können wir

$$L = f(x) = \frac{(x - \alpha_{h+1})(x - \alpha_{h+2}) \dots (x - \alpha_n)}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_h)} \quad (2)$$

⁶ D. h. wir betrachten zwei Punkte A und B eines Schalters mit n Stellungen und stellen fest, daß der Leitwert L zwischen A und B stets ∞ ist, wenn der Handgriff in der Stellung α_i ($i = 1, 2, \dots, h < n$) steht und daß $L = 0$ ist, wenn der Handgriff in der Stellung α_j ($j = h + 1, h + 2, \dots, n$) ist. Dabei ist es ganz gleichgültig, in welchem mechanischen oder elektrischen Zusammenhang der Handgriff mit den Punkten A und B steht.

schreiben, wenn wir für $x = \alpha_i$ ($i = 1, 2 \dots h$) stets

$$\frac{(\alpha_i - \alpha_{h+1})(\alpha_i - \alpha_{h+2}) \dots (\alpha_i - \alpha_n)}{0} = \infty, \quad (3)$$

bzw. für $x = \alpha_j$ ($j = h+1, h+2 \dots n$)

$$\frac{0}{(\alpha_j - \alpha_1)(\alpha_j - \alpha_2) \dots (\alpha_j - \alpha_h)} = 0 \quad (4)$$

setzen. Da es nur auf die Werte ∞ und 0 ankommt, ist die Schreibweise (2) natürlich mancherlei Modifikationen fähig; so könnte man an Stelle von (2) auch allgemeiner

$$L = f_1(x) = C \frac{(x - \alpha_{h+1})^{\beta_{h+1}} (x - \alpha_{h+2})^{\beta_{h+2}} \dots (x - \alpha_n)^{\beta_n}}{(x - \alpha_1)^{\beta_1} (x - \alpha_2)^{\beta_2} \dots (x - \alpha_h)^{\beta_h}} \quad (5)$$

setzen, wobei C eine beliebige und die β_k ($k = 1, 2 \dots n$) beliebige positive reelle Zahlen sind.

Sind x und y zwei Schalter mit gleich viel Stellungen α_i und β_i ($i = 1, 2 \dots n$), so kann man sie „kuppeln“, indem man ihre Stellungen einander paarweise und



Abb. 4.

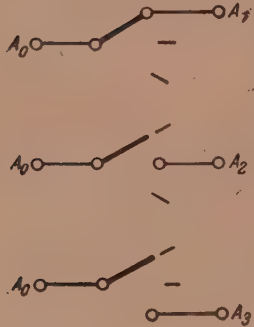


Abb. 5.

umkehrbar eindeutig zuordnet und die Antriebe so mechanisch verbindet (kuppelt), daß sie stets zugleich in zugeordneten Stellungen stehen. Durch eine geeignete Permutation der Stellungsnummern eines der beiden Schalter können wir stets erreichen, daß Stellungen mit den gleichen Nummern einander zugeordnet sind, d. h. daß stets beide Schalter zugleich in der Stellung i stehen ($i = 1, 2 \dots n$). Dann können wir $\alpha_i = \beta_i$ und $y = x$ setzen. Aus den beiden Schaltern ist ein einziger geworden (es ist ja auch nur mehr ein einziger Antrieb da), nur die Zahl der Klemmen und Kontakte hat sich vergrößert. Mitunter wird es aber zweckmäßig sein, die beiden gekuppelten Schalter doch für sich zu behandeln, aber man wird immer dieselbe Variable für beide Schalter verwenden. Umgekehrt kann man sich jeden Schalter mit $m > 2$ Klemmen aus $M = \binom{m}{2}$ Schaltern mit je zwei Klemmen durch Kupplung entstanden denken. Jeder dieser M Schalter hat wieder ebensoviele Stellungen wie der ursprüngliche. Die Zahl der Kontakte wird aber unter Umständen verringert werden können. Z. B. wird ein dreistelliger Schalter x (Abb. 4), der vier Klemmen A_0, A_1, A_2, A_3 und drei Kontakte hat, durch drei gekuppelte⁷ Schalter mit je drei Stellungen und je einem Kontakt ersetzt werden können (Abb. 5).

Die nicht mit einer Klemme verbundenen Striche von Abb. 5 stellen keine Kontakte dar, sondern markieren nur die Schalterstellungen. Der dreistellige Umschalter von Abb. 4 gibt zunächst $\binom{4}{2} = 6$ Admittanzen mit den Leitfähigkeiten L_{ik} ($i, k = 0, 1, 2, 3$); da aber $L_{12} = L_{13} = L_{23} = 0$ ist, sind diese drei Admittanzen uninteressant, es bleiben nur die drei Admittanzen von Abb. 5 mit den Leitfähigkeiten

$$L_{01} = \frac{(x - \alpha_2) \cdot (x - \alpha_3)}{x - \alpha_1}, \quad L_{02} = \frac{(x - \alpha_3) \cdot (x - \alpha_1)}{x - \alpha_2}, \quad L_{03} = \frac{(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)}{x - \alpha_3}. \quad (6)$$

Wir betrachten im folgenden Schaltungen vom allgemeinen Typus ($s; n_1, n_2 \dots n_s$). Die unabhängigen Veränderlichen schreiben wir in der Regel nicht mehr an; ihre Zahl ist durch die Angabe des Typus gegeben und ausnahmsweise von Interesse.

⁷ Diese Kupplung sollte in der Abb. 5 ähnlich wie in Abb. 1 angedeutet sein. (Zusatz bei der Korrektur.)

3. Die Grundoperationen der Schaltalgebra.

Wir haben bereits festgestellt, daß die einfachsten Elemente einer Schaltung die Kontakte sind und es wird unsere Aufgabe sein, den Aufbau einer Schaltung aus den Kontakten durch einen analytischen oder genauer algebraischen Ausdruck darzustellen. Einer der ersten Schritte auf diesem Wege war die Einführung der beschreibenden Funktionen der Admittanzen einer Schaltung, aber durch die Angabe der sämtlichen Admittanzen ist zwar die Wirkungsweise der Schaltung völlig charakterisiert, jedoch in einer wenig übersichtlichen Weise und vor allem ist noch kein Hinweis über den Aufbau der Schaltung aus den Kontakten gegeben. Überlegen wir uns zunächst, was wir mit der Redeweise, eine Schaltung sei aus Kontakten aufgebaut, überhaupt zum Ausdruck bringen wollen. Es ist klar, daß wir, um von dem einfachsten Fall auszugehen, aus zwei Kontakten auf zwei Arten eine schon etwas weniger einfache Admittanz gewinnen können; wir können diese beiden Kontakte entweder parallel oder in Serie schalten. Man überlegt leicht weiter, daß man aus drei Kontakten vier verschiedene Admittanzen herstellen kann, immer durch gewisse Kombinationen von Parallel- und Serienschaltungen. Es wird sicher also auch der Aufbau einer beliebigen Schaltung aus den Kontakten aus einer solchen Kombination von Parallel- und Serienschaltungen in dem Sinne bestehen, daß ein neuer Kontakt entweder dadurch hinzugefügt wird, daß er zwei verschiedene Punkte der Schaltung verbindet oder dadurch, daß die Leitung zwischen zwei äquivalenten Punkten durchschnitten und hier der neue Kontakt eingesetzt wird.

Aus diesen Überlegungen geht wohl mit aller Deutlichkeit hervor, daß wir, um unserer Aufgabe näherzukommen, zunächst einmal untersuchen müssen, wie sich die Parallel- und Serienschaltung von Kontakten oder allgemeiner von beliebigen Admittanzen analytisch auswirkt. Wenn wir zwei gegebene Admittanzen parallel oder in Serie schalten, so entstehen neue Admittanzen; die Frage ist, wie sich die beschreibenden Funktionen dieser neuen Admittanzen aus den beschreibenden Funktionen der gegebenen Admittanzen berechnen lassen. Diese Verknüpfungen von Admittanzen werden wir, da sie den Grundverbindungen der Schaltungstechnik entsprechen, als Grundoperationen der Schaltalgebra bezeichnen. Es zeigt sich, daß das in der Tat möglich ist, und daß diese beiden Grundoperationen so weitgehende Analogien mit der Addition und Multiplikation der gewöhnlichen reellen oder allgemeiner komplexen Zahlen aufweist, daß wir auch hier diese Grundoperationen als Addition und Multiplikation bezeichnen und auf ihnen eine Algebra der Schaltungen aufbauen können. Die Aufgabe dieser Schaltalgebra wird nun einerseits darin bestehen, den Aufbau einer vorgelegten Schaltung aus ihren Kontakten durch einen analytischen, insbesondere algebraischen Ausdruck in eindeutiger Weise wiederzugeben, zum anderen Teil darin, umgekehrt aus gegebenen Schaltbedingungen, d. h. aus der gegebenen Wirkungsweise der Schaltung ihren Aufbau aus einer Mindestzahl von Kontakten und Schaltern anzugeben.

Wir beginnen also mit den Grundoperationen und betrachten die Leitwerte $L_1 = f$ und $L_2 = g$ zweier beliebiger Admittanzen, die aus verschiedenen Schaltungen entnommen sind. f und g sind die beschreibenden Funktionen der beiden Admittanzen; die Argumente lassen wir weg, solange sie nicht aus besonderen Gründen für uns interessant sind. f und g können für sich nur die Werte ∞ oder 0 annehmen. Betrachten wir beide zugleich, so ergeben sich vier mögliche Kombinationen, die wir in Form einer Tabelle zusammenstellen (die beiden ersten Zeilen der Tabelle 1). Schalten wir die beiden Admit-

Tabelle 1.

	1	2	3	4
f	∞	∞	0	0
g	∞	0	∞	0
$f + g$	∞	∞	∞	0
$f \cdot g$	∞	0	0	0

tanzen parallel (Abb. 6),⁸ so ergeben sich in den vier obigen Fällen der Reihe nach die in der dritten Zeile der Tabelle 1 angegebenen Werte für die Leitfähigkeit der durch die Parallelschaltung entstehenden resultierenden Admittanzen. Wir können also für die Leitfähigkeit L' der resultierenden Admittanz

$$L' = \varphi = f + g \quad (8)$$

setzen, L' ist also gleich der Summe der Leitfähigkeiten der beiden parallelgeschalteten Admittanzen. Das stimmt völlig damit überein, daß ganz allgemein $L' = L_1 + L_2$

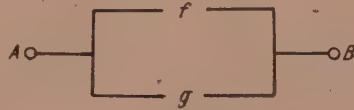


Abb. 6.



Abb. 7.

die Leitfähigkeit von zwei beliebigen parallelgeschalteten Widerständen mit den Leitfähigkeiten L_1, L_2 ist.

Schalten wir die beiden Admittanzen in Reihe (Abb. 7), so ergeben sich in den vier Fällen die in der letzten Zeile der Tabelle 1 angeschriebenen Leitfähigkeiten. Setzen wir fest, daß stets

$$\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0 \quad (9)$$

sein soll, so können wir alle vier Fälle durch die eine Relation

$$L'' = \varphi = f \cdot g \quad (10)$$

zusammenfassen, so daß die resultierende Leitfähigkeit L'' gleich dem Produkt der Leitfähigkeiten der beiden in Serie geschalteten Admittanzen wird. Bei beliebigen Leitfähigkeiten L_1 und L_2 ergibt sich durch Serienschaltung die Leitfähigkeit $L'' = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$. Diesen Ausdruck kann man aber, wenn für L_1 und L_2 nur die Werte ∞ und 0 in Betracht kommen, wegen (9) durch die einfachere Gleichung $L'' = L_1 \cdot L_2$ ersetzen, was eben die Aussage von (10) ist.

Ganz Entsprechendes gilt, wenn man mehr als zwei Admittanzen parallel oder in Serie schaltet; die resultierende Leitfähigkeit ist im ersten Falle die Summe, im zweiten Falle das Produkt der einzelnen Leitfähigkeiten. Für die Addition und Multiplikation der Leitfähigkeiten gilt das kommutative und das assoziative Gesetz; d. h. es ist

$$\begin{aligned} f + g &= g + f, & f \cdot g &= g \cdot f, \\ f + (g + h) &= (f + g) + h = f + g + h, & f \cdot (g \cdot h) &= (f \cdot g) \cdot h = f \cdot g \cdot h. \end{aligned}$$

Die leitende Verbindung oder, wie wir kurz sagen wollen, der Strompfad zwischen den Klemmen der resultierenden Admittanz ist hergestellt, wenn im Falle der Parallelschaltung f oder g , im Falle der Serienschaltung sowohl f als auch g einen Strompfad darstellt. Auf die Bedeutung dieser Formulierung werden wir in 10. zurückkommen.

Durch Parallel- oder Serienschaltung von zwei Admittanzen vom Typus $[1; n_1]$ und $[1; n_2]$ ergibt sich eine Admittanz vom Typus $[2; n_1; n_2]$, d. h. aus zwei Schaltern wird eine Schaltung.

Sind zwei Schalter vom gleichen Typus $[1; k]$ gegeben, deren Leitfähigkeiten gemäß (1a) durch $f(x)$ und $g(y)$ gegeben sind, so können wir sie gemäß 2. kuppeln und $y = x$ setzen. Dann werden in (8) und (10) die resultierenden Leitfähigkeiten

⁸ In der Abb. 6 ist ebenso wie in einigen späteren Abbildungen infolge eines Versehens die übliche Kennzeichnung von Leitungsverzweigungen durch Punkte unterblieben; wir hoffen, daß dadurch keine Mißverständnisse entstehen werden. (Zusatz bei der Korrektur.)

Funktionen von x allein, d. h. die resultierenden Admittanzen vom selben Typus $[1; k]$. Sind außerdem in beiden Schaltern stets dieselben Kontakte geöffnet bzw. geschlossen, so ist $g(x) = f(x)$ und wir nennen die beiden Admittanzen dann identisch. Aus (8) bzw. (10) wird

$$L' = f + f = 2f \quad \text{und} \quad L'' = f \cdot f = f^2.$$

Wegen $2 \cdot 0 = 0$, $0^2 = 0$, $2 \cdot \infty = \infty$, $\infty^2 = \infty$ können wir

$$2f = f \quad \text{und} \quad f^2 = f$$

setzen. Allgemein gilt, wenn n eine positive ganze Zahl ist,

$$\text{und} \quad n f = f \tag{11}$$

$$f^n = f. \tag{12}$$

Es gilt also der Satz:

Serien- und Parallelschaltung identischer Admittanzen lassen sich durch je eine einzige Admittanz ersetzen.

Verhalten sich die beiden Admittanzen aber so, daß in der einen alle Kontakte geschlossen sind, die bei derselben Stellung der anderen Admittanz offen sind und umgekehrt — wir nennen die beiden Admittanzen dann invers oder reziprok —, so ist die Leitfähigkeit der einen ∞ , wenn die der anderen 0 ist und umgekehrt. Bezeichnen wir die inverse Admittanz von f mit \bar{f} und definieren wir

$$\overline{\infty} = 0 \quad \text{und} \quad \overline{0} = \infty, \tag{13}$$

so bleiben in der Tabelle 1, wenn wir g durch f ersetzen, nur die beiden mittleren Spalten 2 und 3 und es folgt aus (8)

$$f + \bar{f} = \infty \tag{14}$$

$$\text{und aus (10)} \quad f \cdot \bar{f} = 0. \tag{15}$$

Es gelten also die beiden Sätze:

Jede Parallelschaltung reziproker Admittanzen läßt sich durch einen Leiter ersetzen.

Jede Serienschaltung reziproker Admittanzen kann gestrichen werden.

Erwähnt seien schließlich noch die wichtigen Relationen

$$f + 0 = f, \quad f + \infty = \infty \tag{16}$$

$$\text{und} \quad f \cdot 0 = 0, \quad f \cdot \infty = f, \tag{17}$$

deren Richtigkeit evident ist.

Man könnte die inverse Admittanz von f auch mit $\frac{C}{f}$, wo C eine beliebige komplexe Zahl ist, oder insbesondere mit $\frac{1}{f}$ bezeichnen, was mit den Festsetzungen (3) und (4), die dann an Stelle von (13) treten würden, durchaus im Einklang stünde. Aber diese Schreibweise wäre wenig zweckmäßig, da $\frac{1}{f}$ nicht als Quotient angesehen werden darf; vgl. die Bemerkung am Schluß von 5.⁹

⁹ Die meisten unserer allgemeinen Relationen und Formeln würden auch gelten, wenn wir noch andere Leitwerte als nur ∞ und 0 in den Kreis unserer Betrachtungen gezogen hätten. Aber die Formeln (13) wären dann nicht mehr aufrechtzuhalten, denn sinngemäß und auch in vollem Einklang mit den Definitionen der algebraischen Logik müßte man dann unter $\bar{0}$ alle von 0 verschiedenen und unter ∞ alle von ∞ verschiedenen Leitwerte verstehen, die aber dann eben nicht mit ∞ bzw. 0 zusammenfielen.

4. Die beiden distributiven Gesetze.

Das distributive Gesetz

$$f(g + h) = fg + fh, \quad (18)$$

wobei f , g und h die Leitfähigkeiten beliebiger Admittanzen sind, muß natürlich, da es für beliebige Zahlen gilt, auch für die besonderen Werte ∞ und 0 richtig sein. Wir wollen uns davon aber auch an Hand der Tabelle 2 überzeugen.

Tabelle 2.

1	2	3	4	5	6	7
f	g	h	$f(g+h)$	$fg+fh$	$f+gh$	$(f+g)(f+h)$
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
∞	∞	0	∞	∞	∞	∞
∞	0	∞	∞	∞	∞	∞
∞	0	0	0	0	∞	∞
0	∞	∞	0	0	∞	∞
0	∞	0	0	0	0	0
0	0	∞	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

Die ersten drei Spalten geben alle möglichen Wertetripel von f , g und h . Die beiden nächsten geben den Nachweis für (18), während die letzten beiden Spalten eine neue Relation

$$f + gh = (f + g)(f + h) \quad (19)$$

liefern, die aus (18) durch Vertauschen von Multiplikation und Addition entsteht. Auch (19) ist also eine Art distributives Gesetz, das aus der völligen Dualität zwischen Serien- und Parallelschaltung, die wir im Lauf unserer Untersuchungen noch näher



Abb. 8.

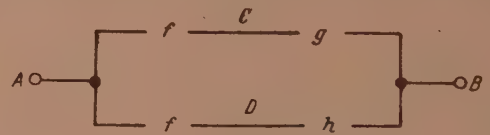


Abb. 9.

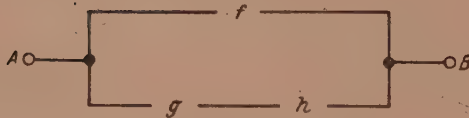


Abb. 10.



Abb. 11.

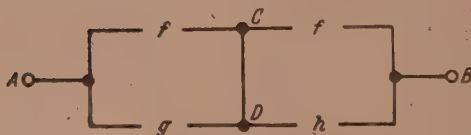


Abb. 12.

kennenlernen werden, also aus der Dualität von Summe und Produkt folgt; in der Tat ergibt sich (19) aus (18) oder auch umgekehrt (18) aus (19) durch eine einfache Vertauschung der Zeichen für Addition und Multiplikation.

Was bedeuten (18) und (19) aber schaltungstechnisch?

Die linke Seite von (18) ist die Leitfähigkeit einer Admittanz, die durch Serienschaltung von f mit der durch Parallelschalten von g und h entstandenen Admittanz gebildet ist (Abb. 8); die rechte Seite von (18) ist die Parallelschaltung von zwei Admittanzen, von denen die eine eine Serienschaltung von f und g , die andere eine Serienschaltung von f und h ist (Abb. 9). (18) sagt aus, daß man die beiden Punkte C

und D in Abb. 9 durch einen Leiter verbinden und die beiden identischen, dann parallelgeschalteten Admittanzen f entsprechend (11) durch eine einzige Admittanz f ersetzen kann, wodurch man sofort bei der Schaltung Abb. 8 angelangt ist.

Analog stellen die Schaltungen Abb. 10 und 11 die linke und rechte Seite von (19) dar. Abb. 11 kann durch Abb. 12 ersetzt werden. (19) sagt dann, daß man die Verbindung CD weglassen und die beiden identischen, in Serie geschalteten Admittanzen f gemäß (12) durch eine einzige Admittanz f ersetzen kann, wodurch man zur Schaltung Abb. 10 gelangt.

Im Sonderfall $h = \bar{f}$ wird aus (18)

$$f(g + \bar{f}) = fg + f\bar{f} = fg + 0 = fg, \quad (20)$$

d. h. die Admittanz h der Abb. 8 kann weggelassen werden. Aus (20) wird

$$f + g \cdot \bar{f} = (f + g) \cdot (f + \bar{f}) = (f + g) \cdot \infty = f + g, \quad (21)$$

d. h. daß in Abb. 10 die Admittanz h durch einen Leiter ersetzt werden kann.

Erwähnt sei noch die wichtige Relation

$$f + fg = f \quad (22)$$

bei beliebigem f und g . In der Tat ist wegen (17)

$$f + fg = f \cdot \infty + f \cdot g = f(\infty + g) = f \cdot \infty = f.$$

Setzt man in (18) und (19) $h = f$, so gehen die beiden Formeln wegen $f^2 = f$ und $2f = f$ ineinander über.

Wir wollen bei dieser Gelegenheit doch noch besonders darauf aufmerksam machen, daß wir hier einem eigentlich völlig neuartigen mathematischen Beweisverfahren begegnet sind. Wir meinen den Beweis der beiden distributiven Gesetze mittels der Tabelle 2. Es handelt sich um eine Art statistischer Methode, die hier deshalb durchführbar ist, weil es nur die beiden Werte ∞ und 0 gibt. Dieselbe Methode wird selbstverständlich immer dann anwendbar sein, wenn es sich um Mengen einer ganz bestimmten endlichen Anzahl von Elementen handelt.

5. Weitere Formeln. Subtraktion und Division.

Es gelten die beiden zueinander dualen Relationen

$$\overline{f + g} = \bar{f} \cdot \bar{g} \quad (23)$$

und

$$\overline{f \cdot g} = \bar{f} + \bar{g}. \quad (24)$$

Zum Beweis bedienen wir uns wieder einer Tabelle (Tabelle 3); die Spalten 6 und 9 sind der Nachweis von (23), die Spalten 8 und 10 der von (24).

Tabelle 3.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	g	\bar{f}	\bar{g}	$f + g$	$\bar{f} + \bar{g}$	$f \cdot g$	$\bar{f} \cdot \bar{g}$	$\overline{f \cdot g}$	$\overline{\bar{f} + \bar{g}}$
∞	∞	0	0	∞	0	∞	0	0	0
∞	0	0	∞	∞	0	0	∞	0	0
0	∞	∞	0	∞	0	0	∞	0	∞
0	0	∞	∞	0	∞	0	∞	∞	∞

Es seien nun f und g gegeben, φ und ψ gesucht, so daß

$$f + \varphi = g \quad (25)$$

bzw.

$$f \cdot \psi = g. \quad (26)$$

Wir schreiben dann

$$\varphi = g - f \quad \text{und} \quad \psi = \frac{g}{f}. \quad (27)$$

Wir betrachten wieder eine Tabelle:

Tabelle 4.

1	2	3	4	5	6
f	g	$\varphi = g - f$	$\psi = \frac{g}{f}$	\bar{f}	$g \cdot \bar{f}$
∞	∞	beliebig	∞	0	0
∞	0	existiert nicht	0	0	0
0	∞	∞	existiert nicht	∞	∞
0	0	0	beliebig	∞	0

(25) hat also nur dann eine Lösung $\varphi = g - f$, wenn $f \leq g$ ist; für $f = g = \infty$ ist diese Lösung ($\infty - \infty$) aber unbestimmt. (26) hat nur dann eine Lösung $\psi = \frac{g}{f}$, wenn $f \geq g$ ist; für $f = g = 0$ ist diese Lösung $\left(\frac{0}{0}\right)$ aber unbestimmt.

Man sieht, daß die Schreibweise \bar{f} an Stelle von $\frac{1}{f}$ für die Inverse von f recht zweckmäßig ist. Schreibt man nämlich z. B. $g \cdot \frac{1}{f}$ statt $g \cdot \bar{f}$, so ist man nur zu leicht versucht, dafür kurz $\frac{g}{f}$ zu setzen, was aber falsch wäre, wie man aus den Spalten 4 und 6 der Tabelle 4 entnimmt.

6. Einführung der Kontakte.

Wir haben bisher allgemeine Admittanzen und die einfachsten Verbindungen von Admittanzen untersucht, insbesondere die Serien- und Parallelschaltung, auf die im Sinne von 3. jede noch so komplizierte Schaltung zurückführbar ist. Wir müssen aber noch einen Schritt weiter gehen, um dem zu Beginn von 3. aufgestellten Programm zu genügen und den Aufbau von Admittanzen bzw. Schaltern und Schaltungen aus Kontakten untersuchen, die ja selbst nichts anderes sind als Admittanzen der einfachsten Type [1; 2], d. h. Schalter mit zwei Stellungen. Die Kontakte eines Schalters sind dann stets in bestimmter Weise gekuppelt und durch einen einzigen gemeinsamen Antrieb betätigt.

Wir betrachten sämtliche Kontakte eines Schalters x , die in der Stellung i oder α_i geschlossen sind. Wir nehmen dabei an, daß ein Kontakt eines Schalters auch stets nur in einer einzigen Stellung geschlossen ist. Diese Forderung mag im Hinblick auf gewisse technische Konstruktionen, wie Walzenschalter und dgl., zunächst als eine höchst unzulässige Einschränkung erscheinen (Nichtelektrotechniker seien eingeladen, sich einmal in einem modernen Radioapparat das Spiel der Kontakte des Wellenschalters anzusehen). Aber einerseits gibt diese Beschränkung eine wesentliche Vereinfachung und andererseits kann ein Kontakt, der in zwei Stellungen geschlossen ist, durch die Parallelschaltung zweier Kontakte ersetzt werden, von denen der eine in der ersten, der andere in der zweiten Stellung des Antriebes geschlossen ist. Die Leitfähigkeit des i -ten Kontaktes ist dann nach (2)

$$a_i(x) = \frac{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_{i-1})(x - \alpha_{i+1}) \dots (x - \alpha_n)}{x - \alpha_i} = \frac{A_i}{x - \alpha_i}, \quad (28)$$

wobei A_i aus dem Produkt aller Faktoren $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$ durch Weglassen des i -ten Faktors $x - \alpha_i$ entsteht. Wir bezeichnen die Leitfähigkeit von Kontakten eines Schalters stets mit demselben kleinen lateinischen Buchstaben a oder b

oder c usw. und mit einem die Schalterstellung, bei der der betrachtete Kontakt geschlossen ist, anzeigenden Index. Statt vom Schalter x sprechen wir auch vom Schalter a und vom Kontakt a_i des Schalters a . Ein Kontakt a_i kann natürlich beliebig oft vorhanden sein, aber alle diese Kontakte sind stets zugleich geschlossen oder zugleich offen.

Ist $n = 2$, so können wir $a_1(x) = x$ und $a_2(x) = \bar{x}$ setzen.

Gibt es in einem Schalter Kontakte, die in allen Stellungen geschlossen (offen) sind, so können diese Kontakte durch Leiter ersetzt (weggelassen) werden. Wir nehmen an, daß derartige Kontakte bei den im folgenden betrachteten Schaltungen nicht vorkommen.

Wir betrachten wieder, wie in 2., eine Admittanz vom Typus $[1; n]$

$$L = f(x) = \frac{(x - \alpha_{h+1})(x - \alpha_{h+2}) \dots (x - \alpha_n)}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_h)} \quad (2)$$

und setzen entsprechend (28)

$$A_i(x - \alpha_i) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (29)$$

sowie

$$B_i(x - \alpha_i) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_h) \quad (i = 1, 2 \dots h < n), \quad (30)$$

d. h. A_i und B_i entstehen aus den rechtsstehenden Produkten jeweils durch Weglassen des Faktors $x - \alpha_i$. Es folgt

$$A_i = B_i(x - \alpha_{h+1})(x - \alpha_{h+2}) \dots (x - \alpha_n), \quad (31)$$

$$\sum_{i=1}^h B_i^2 > 0. \quad (32)$$

Zu der letzten Ungleichung ist zu bemerken, daß nur dann $\sum_{i=1}^h B_i^2 = 0$ ist, wenn alle

$B_i = 0$ sind; dazu müssen aber mindestens zwei der Ausdrücke $x - \alpha_i$ ($i = 1, 2 \dots h$) verschwinden, was natürlich ausgeschlossen ist, da die α_i voraussetzungsgemäß alle voneinander verschieden sind. An Stelle von (2) können wir also auch

$$L = f_1(x) = f(x) \sum_{i=1}^h B_i^2 \quad (33)$$

setzen. Wir erhalten

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^h \frac{(x - \alpha_{h+1})(x - \alpha_{h+2}) \dots (x - \alpha_n) \cdot B_i^2}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_h)}$$

und wegen (30) und (31)

$$f_1(x) = \sum_{i=1}^h \frac{A_i B_i^2}{B_i(x - \alpha_i)} = \sum_{i=1}^h \frac{A_i}{x - \alpha_i}. \quad (33')$$

(33') ist eine Art Partialbruchzerlegung der gebrochenen rationalen Funktion (2), bei der die Partialbrüche (28) allerdings eine etwas ungewohnte Form haben (der Zähler ist keine Konstante). Wegen (28) folgt also weiter, da es auf den Faktor $\sum B_i^2$ nicht ankommt,

$$L = f_1(x) = \sum_{i=1}^h a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_h, \quad (34)$$

d. h. aber nichts anderes, als daß die Admittanz mit der Leitfähigkeit (2) durch Parallelschalten der Kontakte $a_1, a_2 \dots a_h$ eines Schalters mit den Kontakten $a_1, a_2 \dots a_h \dots a_n$ hergestellt werden kann.

In (34) ist $f(x)$ als zusammengesetzte Funktion dargestellt; f erscheint hier zunächst als Funktion der a_i und diese sind nach (28) erst Funktionen von x . Die Ein-

führung der Variablen x ist für die praktischen Zwecke der Schaltmathematik überflüssig, d. h. es genügt die Darstellung (34) der Funktion f durch die Leitfähigkeit der einzelnen Kontakte. Daß wir überhaupt die Variablen $x, y \dots$ eingeführt haben, geschah sowohl des besseren Verständnisses halber als auch, weil auf diese Art eine allgemeine Definition der beschreibenden Funktion einer Admittanz möglich war, die von dem besonderen Aufbau dieser Funktion aus den Kontakten der betrachteten Schaltung unabhängig war.

Wir knüpfen wieder an (34) an. Da der Schalter voraussetzungsgemäß n Stellungen hat, ist $f = \infty$ für $h = n$. Wäre das nämlich nicht der Fall, so gäbe es mindestens einen Kontakt, der in allen Stellungen offen ist; solche Kontakte sollen aber nach der oben getroffenen Festsetzung nicht vorkommen. Wir bezeichnen

$$\Gamma = a_1 + a_2 \dots + a_n = \infty \quad (35)$$

als „Grenzfunktion“ des Schalters a . Γ ist die Leitfähigkeit einer Admittanz, die aus der Parallelschaltung aller Kontakte des Schalters a besteht. Nun existiert zu jeder Funktion eine inverse oder reziproke Funktion

$$\bar{f} = \overline{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \quad (36)$$

Wegen (14') muß

$$f + \bar{f} = \infty \quad (37)$$

sein; wegen $\Gamma = \infty$ existiert die Differenz

$$\bar{f} = \Gamma - f, \quad (38)$$

und zwar ist sie eindeutig bestimmt, da aus $f = \infty$ sicher $\bar{f} = 0$ folgt. Es muß also wegen (35)

$$\bar{f} = a_{h+1} + a_{h+2} + \dots + a_n \quad (39)$$

sein, d. h. die Inverse von f besteht aus der Parallelschaltung aller in f nicht enthaltenen Kontakte. In der Tat ist $f = \begin{Bmatrix} \infty \\ 0 \end{Bmatrix}$, wenn $\begin{Bmatrix} \text{einer} \\ \text{keiner} \end{Bmatrix}$ der Kontakte $a_1, a_2 \dots a_h$ geschlossen ist; dann ist aber $\begin{Bmatrix} \text{keiner} \\ \text{einer} \end{Bmatrix}$ der Kontakte $a_{h+1}, a_{h+2} \dots a_n$ geschlossen, also $\bar{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \infty \end{Bmatrix}$.

Für je zwei verschiedene Kontakte a_i und a_k eines Schalters gilt stets

$$a_i \cdot a_k = 0, \quad (40)$$

da ja sicher nicht zugleich $a_i = a_k = \infty$ sein kann.

Beispiel. Es sei $n = 3, h = 2$, also

$$f = a_1 + a_2.$$

Dann wird nach (39) und (40)

$$\bar{f} = a_1 + a_2 = \bar{a_1} \cdot \bar{a_2} = (a_2 + a_3)(a_1 + a_3) = a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3 + a_3^2 = a_3.$$

Besitzt ein Schalter eine „Aus“-Stellung, bei der kein einziger Kontakt geschlossen ist, so ist es meist zweckmäßig, diese Stellung mit a_0 , die übrigen mit $a_1, a_2 \dots a_{n-1}$ zu bezeichnen. Ist $n = 2$, so handelt es sich um einen einfachen Ausschalter mit der „Aus“-Stellung a_0 und der „Ein“-Stellung a_1 . In diesem Fall ist der Schalter aber praktisch gleichwertig mit einem Kontakt, dessen Leitfähigkeit wir nach (28) durch

$$a = a_1 = \frac{x - \alpha_0}{x - \alpha_1}$$

oder

$$a = a_1 = x$$

ausdrücken, was den Werten $\alpha_1 = \infty, \alpha_0 = 0$ entspricht.

7. Grundfunktion einer Schaltung, Vollform, Kürzung, Normalform und reduzierte Form einer Admittanz.

Es sei eine Schaltung gegeben mit drei Schaltern a, b, c , die bzw. p, q, r Stellungen haben. Wir wollen uns auf diesen speziellen Fall beschränken, da unsere Überlegungen einigermaßen unübersichtlich würden, wenn wir die Zahl der Schalter auch allgemein ließen. Es ist aber alles Wesentliche schon im Fall von drei Schaltern zu erkennen.

Nach 6. sind

$$\Gamma_a = \sum_{i=1}^p a_i, \quad \Gamma_b = \sum_{k=1}^q b_k, \quad \Gamma_c = \sum_{l=1}^r c_l \quad (41)$$

die Grenzfunktionen der drei Schalter. Als Grenzfunktion der vorgelegten Schaltung bezeichnen wir

$$\begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_a \cdot \Gamma_b \cdot \Gamma_c = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r a_i b_k c_l = \\ &= a_1 b_1 c_1 + \dots + a_1 b_1 c_r + a_1 b_2 c_1 + \dots + a_1 b_2 c_r + \dots + a_p b_q c_r. \end{aligned} \quad (42)$$

Selbstverständlich gilt auch hier wieder

$$\Gamma = \infty, \quad (43)$$

was auch aus
folgt.

$$\Gamma_a = \Gamma_b = \Gamma_c = \infty \quad (44)$$

Wir greifen eine beliebige Admittanz heraus. Sie ist im allgemeinen vom Typus $[3; p, q, r]$. Jedes Glied von (42), also jedes Produkt $a_i b_k c_l$ kann einen möglichen Strompfad der Admittanz darstellen und umgekehrt muß jeder Strompfad der Admittanz entweder gleich einem Glied von (42) oder eine Summe von solchen sein. Eine Admittanz aber, die alle Strompfade (42) enthält, ist uninteressant, da ihre Leitfähigkeit stets ∞ ist und sie durch einen Leiter ersetzt werden kann. Es wird also eine Admittanz stets aus einem bestimmten, für die betreffende Schaltung charakteristischen und durch die Schaltbedingungen gegebenen Teil der Strompfade bestehen, ihre Leitfähigkeit also durch eine bestimmte Teilsumme

$$f = \sum' a_i b_k c_l \quad (45)$$

von (42) gegeben sein; dabei soll \sum' eben die betrachtete Teilsumme charakterisieren. Die rechte Seite von (45) heißt Vollform der betrachteten Admittanz.

Enthält die Vollform z. B. alle Glieder

$$f_1 = a_i b_k c_1 + a_i b_k c_2 + \dots + a_i b_k c_r = a_i b_k \sum_{l=1}^r c_l,$$

so wird wegen (44) und (17)

$$f = a_i b_k \cdot \Gamma_c = a_i b_k \cdot \infty = a_i b_k;$$

es erscheinen also r Glieder der Vollform durch das eine Glied $a_i b_k$ ersetzt und diesen Vorgang, also das Wegstreichen von Faktoren Γ_a, Γ_b oder Γ_c gemäß der letzten Gl. (17) wollen wir als „Kürzung“ bezeichnen und den sich so ergebenden Ausdruck für die beschreibende Funktion f der betrachteten Admittanz als gekürzte Form von f .

Während die Vollform jedenfalls die charakteristische Eigenschaft hat, daß in jedem Glied alle Schalter vertreten sind, gilt das von den gekürzten Formen nicht mehr. Sind allgemein s Schalter vorhanden, so besteht jedes Glied der Vollform aus s Faktoren, ist also von der Ordnung s in den Kontaktleitfähigkeiten a_i, b_k, c_l . In einer gekürzten Form gibt es dann stets Glieder von geringerer als s -ter Ordnung. Es kann natürlich auch der Fall eintreten, daß eine Vollform überhaupt nicht gekürzt

werden kann; andererseits ist es sicher, daß an jeder Vollform nur eine endliche Zahl von Kürzungen möglich ist, so daß zu einer gegebenen Vollform nur endliche viele gekürzte Formen existieren. Unter diesen muß es eine kürzeste geben, deren Gliederzahl ein Minimum ist und die sich nicht weiter kürzen läßt. Wir bezeichnen sie als Normalform.

Sei als Beispiel eine Schaltung mit zwei zweistelligen Schaltern und die Vollform

$$f = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2$$

einer Admittanz gegeben. Wir können dann entweder wegen $\Gamma_b = b_1 + b_2 = \infty$

$$f = a_1 (b_1 + b_2) + a_2 b_2 = a_1 + a_2 b_2$$

oder wegen $\Gamma_a = a_1 + a_2 = \infty$

$$f = a_1 b_1 + (a_1 + a_2) b_2 = a_1 b_1 + b_2$$

kürzen. Hier hat es zunächst den Anschein, als gäbe es zwei Normalformen, denn in keinem der beiden zuletzt angeschriebenen Ausdrücke ist noch ein Faktor Γ_a oder Γ_b enthalten. Doch lassen sich beide Ausdrücke weiter vereinfachen, allerdings nicht unter einer weiteren Verringerung der Gliederzahl. So könnte man etwa das zweite distributive Gesetz (19) anwenden:

$$a_1 + a_2 b_2 = (a_1 + a_2) (a_1 + b_2) = a_1 + b_2,$$

bzw.

$$a_1 b_1 + b_2 = (a_1 + b_2) (b_1 + b_2) = a_1 + b_2.$$

Man könnte aber auch in der gegebenen Vollform das mittlere Glied $a_1 b_2$ zweimal anschreiben, was sofort

$$f = a_1 (b_1 + b_2) + (a_1 + a_2) b_2 = a_1 + b_2$$

liefert. $a_1 + b_2$ ist die Normalform. Es ist klar, daß ganz allgemein eine weitere Kürzung nicht mehr möglich sein kann, wenn man einmal bei linearen Ausdrücken angelangt ist, weil sonst die Grenzfunktion der Schaltung ein Teil der Vollform hätte sein müssen, während definitionsgemäß jede Vollform ein Teil der Grenzfunktion ist.

Das Beispiel gibt uns einen Hinweis für das Verfahren, welches auch im allgemeinen Fall auf die Normalform führt. Wir erhalten dabei zugleich den Nachweis, daß es stets eine einzige, also eindeutig bestimmte Normalform der beschreibenden Funktion einer Admittanz gibt. Wir beschränken uns wieder auf eine Schaltung mit den drei Schaltern a, b, c mit p, q bzw. r Stellungen. Gegeben sei die Vollform (45). Wir suchen in der Summe rechts alle Glieder, die Γ_a als Faktor enthalten, ferner alle Glieder, die Γ_b und alle Glieder, die Γ_c als Faktor enthalten. Dabei gehen wir jedesmal von der Vollform selbst aus, zählen also unter Umständen gewisse Glieder auch mehrfach. Das Resultat sei

$$f = \Gamma_a f_a + \Gamma_b f_b + \Gamma_c f_c + f_0; \quad (46)$$

f_0 enthält alle Glieder von f , die weder Γ_a, Γ_b noch Γ_c als Faktor enthalten. Selbstredend kann auch $f_a = f_b = f_c = 0$ sein, dann ist $f = f_0$ und die reduzierte Form mit der Vollform identisch. Mit f_a, f_b und f_c kann man ebenso verfahren wie oben mit f selbst. Man beachte dabei, daß f_a nur Kontakte b_k und c_l enthält usw. Es folgt weiter

$$\begin{aligned} f = & \Gamma_a (\Gamma_b f_{ab} + \Gamma_c f_{ac} + f_{a0}) + \\ & + \Gamma_b (\Gamma_c f_{bc} + \Gamma_a f_{ba} + f_{b0}) + \\ & + \Gamma_c (\Gamma_a f_{ca} + \Gamma_b f_{cb} + f_{c0}) + f_0. \end{aligned} \quad (47)$$

Hier ist offenbar $f_{ab} = f_{ba}$ usw. Die Ausdrücke f_{bc}, f_{ca}, f_{ab} sind linear und nach der oben gemachten Bemerkung sicher nicht mehr kürzbar; f_{bc} besteht aus einem Teil von Γ_a usw. f_{a0}, f_{b0}, f_{c0} sind von zweiter Ordnung und ebenfalls nicht mehr kürzbar;

f_a enthält einen Teil des Produktes $\Gamma_b \cdot \Gamma_c$ usw. Wegen (44) und $f_{bc} = f_{cb}$, $f_{ca} = f_{ac}$, $f_{ab} = f_{ba}$ folgt weiter

$$f = f_{bc} + f_{ca} + f_{ab} + f_{a0} + f_{b0} + f_{c0} + f_0 \quad (48)$$

und das ist die gesuchte Normalform. Sie ist eindeutig bestimmt, da das ganze Verfahren eindeutig ist.

In dem obigen Beispiel hätte man also folgendermaßen vorzugehen:

$$f = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 = (a_1 + a_2) b_2 + (b_1 + b_2) a_1 = b_2 + a_1.$$

Bei mehreren Schaltern und bei größeren Stellenzahlen ist das Verfahren nicht gerade einfach durchzuführen und es ist alle Vorsicht nötig, damit keine Faktoren übersehen werden, was sofort zu Ergebnissen führen würde, die insofern falsch sind, als man eben eine noch nicht vollständig gekürzte Form bereits für die Normalform hält, ohne auf eine so einfache Weise wie oben im Fall $a_1 + a_2 b_2$ oder $a_1 b_1 + b_2$ in der Lage zu sein, den Irrtum festzustellen. Vor allem empfiehlt es sich, die gegebene Vollform möglichst gut geordnet anzuschreiben. Wir betrachten ein zweites Beispiel: Gegeben sei die Vollform

$$\begin{aligned} f = & a_1 b_1 c_1 + a_1 b_1 c_2 + a_1 b_2 c_1 + a_1 b_2 c_2 + \\ & + a_2 b_1 c_1 + a_2 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1 + \\ & + a_3 b_1 c_1 + \quad \quad \quad + a_3 b_2 c_1 + a_3 b_2 c_2 \end{aligned} \quad (49)$$

einer Admittanz einer Schaltung mit einem dreistelligen Schalter a und zwei zweistelligen Schaltern b und c . Es wird zunächst

$f = \Gamma_a (b_1 c_1 + b_2 c_1) + \Gamma_b (a_1 c_1 + a_2 c_1 + a_3 c_1 + a_1 c_2) + \Gamma_c (a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_2)$ damit sind alle Glieder der Vollform mindestens einmal angeschrieben, es ist also hier $f_0 = 0$. Es folgt weiter

$$f = \Gamma_a (\Gamma_b c_1) + \Gamma_b (\Gamma_a c_1 + \Gamma_c a_1) + \Gamma_c (\Gamma_b a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_2).$$

Es ist also $f_{bc} = f_{cb} = a_1$, $f_{ca} = f_{ac} = 0$, $f_{ab} = f_{ba} = c_1$,
 $f_{a0} = 0$, $f_{b0} = 0$, $f_{c0} = a_2 b_1 + a_3 b_2$.

Die Normalform ergibt sich nun durch Weglassen der Γ_i zunächst als

$$f = c_1 + c_1 + a_1 + a_1 + a_2 b_1 + a_3 b_2$$

oder

$$f = a_1 + c_1 + a_2 b_1 + a_3 b_2. \quad (50)$$

Wegen der Symmetrie ergeben sich die linearen Glieder zunächst doppelt.

Der Vollform (49) entsprechen zehn parallelgeschaltete Strompfade, der Normalform (50) nur mehr vier. Die Schaltung (50) sieht zunächst so aus, wie in Abb. 13 angedeutet; Abb. 14 gibt dieselbe Schaltung in einer praktischen Ausführungsform.

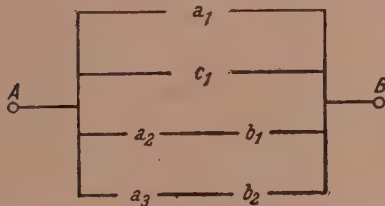


Abb. 13.

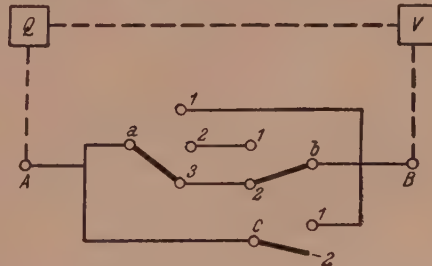


Abb. 14.

Denkt man sich die Schaltung über eine Stromquelle Q und einen Verbraucher V durch die in Abb. 14 strichliert gezeichneten Leitungen geschlossen, so lassen sich folgende Schaltbedingungen formulieren:

1. V soll von a und c aus immer eingeschaltet werden können.
2. V soll von a und c aus ausgeschaltet werden können, sofern V nicht von c oder a aus eingeschaltet ist.
3. V soll von b aus eingeschaltet werden können, ausgeschaltet aber nur, sofern das von der Stelle a aus ermöglicht wird und V nicht von c aus eingeschaltet ist.

In der Praxis handelt es sich aber weniger um die Analyse einer gegebenen Schaltung als vielmehr um die umgekehrte Aufgabe, aus gegebenen Schaltbedingungen eine Schaltung zu entwickeln. Sind etwa die obigen Bedingungen gegeben, so überlegt man leicht, daß 1. und 2. durch Parallelschaltung je eines Kontaktes eines Schalters a und c erfüllt werden, während 3. durch eine einfache Wechselschaltung von je zwei Kontakten von a und b erfüllt wird. Man wird also a dreistellig, b und c zweistellig ausführen, wobei für c ein einfacher Ausschalter mit nur einem Kontakt genügt. In

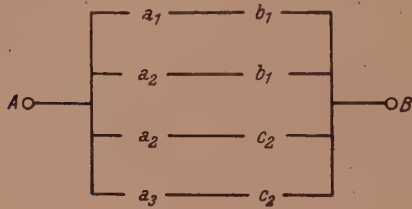


Abb. 15.

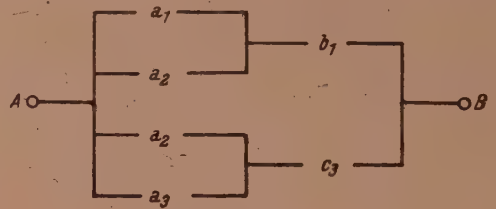


Abb. 16.

diesem Fall ist es ohne Schwierigkeit möglich, direkt zur reduzierten Form (51), bzw. zur Schaltung Abb. 14 zu gelangen. In der Regel wird man aber bei der Formulierung der Schaltbedingungen entweder zu einer gekürzten Form, die zwischen der Vollform und der Normalform liegt, oder zur Vollform selbst gelangen. Letzteres trifft insbesondere für komplizierte Fälle zu, wo es nötig ist, die Grenzfunktion anzuschreiben und an ihr Schritt für Schritt die Glieder zu ermitteln, die für die Vollform der gesuchten Schaltung beizubehalten sind. Vgl. hierzu die Beispiele bei H. Piesch.^{4, 5}

Bemerkt sei, daß man umgekehrt von der Normalform oder von einer beliebigen gekürzten Form sehr leicht zur Vollform kommt; indem man jedes Glied mit dem Produkt der Grenzfunktionen der fehlenden Schalter multipliziert. Für (50) wäre das

$$f = a_1 \Gamma_b \Gamma_c + c_1 \Gamma_a \Gamma_b + (a_2 b_1 + a_3 b_2) \Gamma_c.$$

Wir haben oben gezeigt, daß es zu jeder Schaltung eine und nur eine Normalform der beschreibenden Funktion gibt. Es entsteht die Frage, ob diese Normalform auch stets die einfachste ist, d. h. aus einer Mindestzahl von Kontakten und Leitungen bestehenden Schaltung entspricht. Die beiden Beispiele haben Normalformen ergeben, für die diese Frage zu bejahen ist, da jeder Kontakt der Schaltung nur einmal angeschrieben ist. Wir wollen derartige Formen als reduzierte bezeichnen; sie stimmen aber durchaus nicht immer mit den Normalformen der betreffenden Schaltungen überein. In manchen Fällen wird man aber durch Anwendung des ersten distributiven Gesetzes (18), also durch Herausheben, weitere Vereinfachungen der zugehörigen Schaltung erzielen können. Es sei z. B. die Vollform

$$f = a_1 b_1 c_1 + a_1 b_1 c_2 + a_2 b_1 c_1 + a_2 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_2 + a_3 b_1 c_2 + a_3 b_2 c_2$$

einer Schaltung mit einem dreistelligen Schalter a und zwei zweistelligen Schaltern b und c gegeben. Wir erhalten die Normalform

$$a_1 b_1 + a_2 b_1 + a_2 c_2 + a_3 c_2,$$

der die Schaltung Abb. 15 mit acht Kontakten entspricht. Durch Herausheben von b_1 und b_2 kann man den obigen Ausdruck auch

$$(a_1 + a_2) b_1 + (a_2 + a_3) c_2$$

schreiben, welcher Form die Schaltung Abb. 16 mit nur mehr sechs Kontakten entspricht. Man sagt, man habe die beiden Kontakte b_1 und die beiden Kontakte c_2 von Abb. 15 „zusammengelegt“.

In der Praxis können die Klammern jedenfalls recht ausgiebige Vereinfachungen bedeuten, in prinzipieller Hinsicht handelt es sich dabei aber stets nur um eine Anwendung des ersten distributiven Gesetzes. Es gibt aber wichtige Fälle, die in praktischer und prinzipieller Hinsicht von Interesse sind, wo Zusammenlegungen von Kontakten möglich sind, die sich in der algebraischen Darstellung weder durch Klammern noch in anderer Weise wiedergeben lassen. Das bedeutet aber, daß sich die reduzierten Formen dieser Schaltungen in der bisher geschilderten Weise überhaupt nicht anschreiben lassen. Wir kommen in 9. darauf noch zurück.

8. Die inverse oder reziproke Funktion, Kehrschaltungen.

Wir haben in 6. bereits die inverse Funktion einer Admittanz vom Typus $[1; n]$ betrachtet. Die Verallgemeinerung auf Schaltungen von beliebigem Typus liegt auf der Hand. Wir beschränken uns wie in 7. auf Schaltungen vom Typus $[3; p, q, r]$. Sei die Vollform

$$f = \sum' a_i b_k c_l \quad (45)$$

gegeben; die Differenz

$$\varphi = \Gamma - f \quad (51)$$

ist auch hier eindeutig ausführbar, da $\Gamma = \infty$ und $\varphi = \infty$ oder $= 0$ ist, wenn $f = 0$ oder $= \infty$ ist. Es ist somit

$$\varphi = \bar{f} = \sum'' a_i b_k c_l, \quad (52)$$

wobei \sum'' über alle Glieder von Γ zu erstrecken ist, die in f nicht vorkommen, so daß

$$f + \bar{f} = \sum' a_i b_k c_l + \sum'' a_i b_k c_l = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^q \sum_{l=1}^r a_i b_k c_l = \Gamma = \infty \quad (53)$$

ist. Es ist somit jeder Admittanz (Schaltung mit zwei Klemmen) eine inverse oder reziproke Admittanz (inverse oder reziproke Schaltung) umkehrbar eindeutig zugeordnet. Wegen

$$\bar{\bar{f}} = f \quad (54)$$

ist invers zur inversen Admittanz wieder die ursprüngliche Admittanz. Inverse Admittanzen sind stets vom gleichen Typus.

Inverse Schaltungen bezeichnet man auch als „Kehrschaltungen“.¹⁰ Sie sind in der Praxis z. B. wichtig für den Übergang von Arbeits- in Ruhestromschaltung oder von Verriegelungs- zu Entriegelungsschaltungen.

Unsere Formeln (23) und (24) liefern unmittelbar ein direktes und sehr einfaches Verfahren zur Ermittlung der Kehrschaltung zu einer gegebenen Schaltung. Ein anderes Verfahren besteht darin, die Vollform (45) der gegebenen Schaltung aufzustellen; die Vollform der Kehrschaltung ist dann (52). So ist z. B. invers zu der in 7. betrachteten Funktion

$$f = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2$$

die Funktion

$$\bar{f} = a_2 b_1 = \Gamma - f = (a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2).$$

Andererseits liefert (23) aus der reduzierten Form $f = a_1 + b_2$

$$\bar{f} = \overline{a_1 + b_2} = \overline{a_1} \cdot \overline{b_2} = a_2 b_1$$

wie oben; man beachte, daß bei zweistelligen Schaltern stets $a_1 = a_2$ ist usw. Beim

¹⁰ Vgl. A. Ritter: Verfahren zur Entwicklung von Kehrschaltungen, Arch. Elektrotechn. **35**, 299 (1941), wo ein geometrisches Verfahren zur Ermittlung der Kehrschaltungen angegeben ist.

zweiten Beispiel von 7. erhalten wir durch Bildung der Differenz (51) aus der Vollform (49) sofort

$$\bar{f} = a_2 b_2 c_2 + a_3 b_1 c_2 = (a_2 b_2 + a_3 b_1) c_2,$$

die Form ist bereits reduziert. Die Ermittlung von \bar{f} aus der reduzierten Form (50) sieht so aus:

$$\begin{aligned}\bar{f} &= \overline{a_1 + c_1 + a_2 b_1 + a_3 b_2} = \overline{a_1 \cdot c_1 \cdot a_2 b_1 \cdot a_3 b_2} = (a_2 + a_3) c_2 (\overline{a_2} + \overline{b_1}) (\overline{a_3} + \overline{b_2}) = \\ &= (a_2 + a_3) c_2 (a_1 + a_3 + b_2) (a_1 + a_2 + b_1) = c_2 (a_3 + a_2 b_2 + a_3 b_2) (a_1 + a_2 + b_1) = \\ &= c_2 (a_2 b_2 + a_3 b_1),\end{aligned}$$

wobei neben (23) und (24) in den beiden letzten Zeilen auch (40) wiederholt verwendet wurde.

Dieses Beispiel läßt nun noch eine wichtige Möglichkeit erkennen, die Ermittlung der reduzierten Form einer gegebenen Vollform dadurch zu vereinfachen, daß man durch Differenzbildung zur inversen Form übergeht. Das Verfahren hat offenbar dann — aber nur dann — einen Zweck, wenn die gegebene Vollform mehr als die Hälfte der Glieder der Grenzfunktion umfaßt.

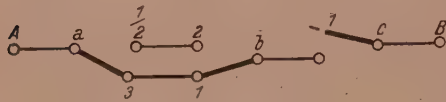


Abb. 17.

So findet man im ersten Beispiel sofort

$$f = \bar{f} = \overline{a_2 b_1} = \overline{a_2} + \overline{b_1} = a_1 + b_2$$

und im zweiten Beispiel

$$\begin{aligned}f = \bar{f} &= \overline{(a_2 b_2 + a_3 b_1) c_2} = \overline{a_2 b_2 + a_3 b_1} + \overline{c_2} = \overline{a_2 b_2} \cdot \overline{a_3 b_1} + \overline{c_2} = (\overline{a_2} + \overline{b_2}) (\overline{a_3} + \overline{b_1}) + \overline{c_2} = \\ &= a_1 + a_1 b_2 + a_3 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_1 + c_1 = a_1 + c_1 + a_2 b_1 + a_3 b_2.\end{aligned}$$

Abb. 17 zeigt die Kerschaltung zu Abb. 14.

9. Vermaschte Schaltungen. Das vollständige n -Eck.

Wir haben schon in 8. angedeutet, daß es Schaltungen gibt, deren reduzierte Formen sich in der algebraischen Darstellung weder durch Klammern noch sonst wie anschreiben lassen. Ein Beispiel für eine derartige Schaltung bildet schon die

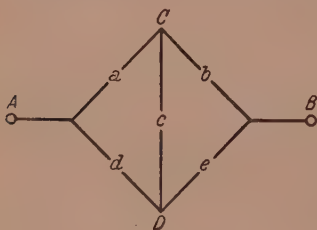


Abb. 18.

Brückenschaltung der Abb. 2, die wir in Abb. 18 in vereinfachter Form entsprechend der inzwischen gewählten Bezeichnungsweise nochmals wiedergeben, wobei a, b, c, d, e Kontakte oder allgemein beliebig gegebene Admittanzen sind. Die resultierende Admittanz (A, B) ist dann

$$f = ab + ace + dc b + de \quad (55)$$

$$\text{oder} \quad f = a(b + ce) + (cb + e)d \quad (56)$$

$$\text{oder} \quad f = b(a + cd) + (ac + d)e, \quad (57)$$

aber es ist offenbar nicht möglich, eine der Abb. 18 entsprechende reduzierte Form anzuschreiben, in der die Kontakte a bis e nur je einmal vorkommen. Man müßte dazu gewissermaßen die beiden in (56) und (57) durchgeführten Heraushebungen vereinigen.

Eine derartige Schaltung nennt man „vermascht“. Offenbar liegen solche Vermaschungen immer dann vor, wenn sich in der Schaltung selbst mehr Kontakte zusammenlegen lassen als in der algebraischen Darstellung. Als Definition der vermaschten Schaltung wäre das wenig befriedigend, doch können wir sofort eine weitere charakteristische Eigenschaft angeben, aus der wir eine einwandfreie Definition gewinnen können: Gibt man eine Stromrichtung vor, z. B. in Abb. 18 die von A nach B ,

so ergibt sich automatisch auch eine Stromrichtung für jeden der vier Strompfade, und zwar werden die Kontakte a, b, d, e in allen Fällen in derselben Richtung vom Strom durchflossen, während bei c die Stromrichtung wechselt. Im Strompfad $a c e$ wird c von oben nach unten, im Strompfad $d c b$ aber von unten nach oben vom Strom durchflossen. Das Vorkommen derartiger Kontakte, die je nach dem Strompfad, dem sie angehören, in verschiedener Richtung vom Strompfad durchflossen werden, ist zunächst einmal sicher eine hinreichende Bedingung für vermaschte Schaltungen. Es ist ja klar, daß ein derartiger Kontakt mit wechselnder Stromrichtung in der algebraischen Darstellung zweimal angeschrieben werden muß, ohne daß eine Zusammenlegung möglich wäre; wir müssen nur bedenken, daß wir durch die Reihenfolge, in der wir die Kontakte in den einzelnen Gliedern (Strompfaden) anschreiben, eindeutig die Stromrichtung darstellen können. Ist dann c ein Kontakt mit wechselnder Stromrichtung, so kommen in der betrachteten Admittanz sicher zwei Strompfade von der Form $f_1 c f_2$ und $f_3 c f_4$ vor, wobei f_1, f_2, f_3 und f_4 beliebige, durch die Schaltung bestimmte Admittanzen sind und die Stromrichtung durch die Reihenfolge der Glieder gegeben ist. Da nun in c die Stromrichtung in diesen beiden Strompfaden wechselt, so muß die Klemme von c , die mit f_1 verbunden ist, auch mit f_4 verbunden sein, während die andere Klemme von c mit f_2 und f_3 verbunden ist, so daß in der betrachteten Admittanz auch die Strompfade f_1, f_4 und f_3, f_2 existieren müssen.

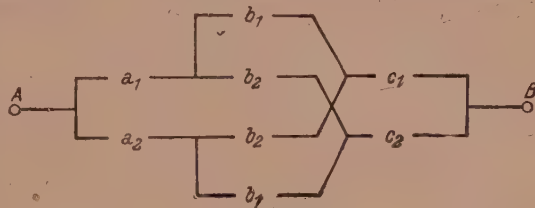


Abb. 19.

Man kommt also zu einer Schaltung ganz entsprechend Abb. 18, wobei nur die Kontakte a, e, d, b der Reihe nach durch f_1 bis f_4 zu ersetzen sind. Damit sind wir aber bei einer beschreibenden Funktion der Gestalt (55) angelangt. Wir wollen im folgenden Kontakte mit wechselnder Stromrichtung als Brückenkontakte bezeichnen.

Notwendig ist die obige Bedingung aber zumindest in dieser Form nicht, denn es gibt vermaschte Schaltungen, für die sie nicht erfüllt ist, z. B. die Wechselschaltung mit drei zweistelligen Schaltern a, b, c (Abb. 19) und der Normalform

$$a_1 b_1 c_1 + a_1 b_2 c_2 + a_2 b_1 c_2 + a_2 b_2 c_1, \quad (58)$$

die man entweder $a_1 (b_1 c_1 + b_2 c_2) + a_2 (b_1 c_2 + b_2 c_1) \quad (59)$

oder $c_1 (a_1 b_1 + a_2 b_2) + c_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1) \quad (60)$

oder aber auch $b_1 (c_1 a_1 + c_2 a_2) + b_2 (c_1 a_2 + c_2 a_1) \quad (61)$

schreiben kann. Man kommt also niemals auf die acht Kontakte von Abb. 19, sondern immer nur auf zehn Kontakte einer der Darstellungen (59) bis (61). Die Verhältnisse liegen hier ähnlich wie bei der Brückenschaltung Abb. 18, aber kein einziger Kontakt ist ein Brückenkontakt in obigem Sinne. Das ist aber hier offenbar allein auf den Umstand zurückzuführen, daß die Kontakte nicht voneinander unabhängig, sondern gekuppelt sind. Hebt man alle diese Kupplungen auf, indem man zu einer sonst durchaus gleichen Schaltung mit lauter unabhängigen Kontakten übergeht, so sind die Brückenkontakte wieder da, und zwar sind alle vier mit b bezeichneten Kontakte von Abb. 19 Brückenkontakte. Bezeichnen wir die unteren Kontakte b_2 und b_1 von Abb. 19, bzw. mit b_3 und b_4 , so ergeben sich folgende neue Strompfade, immer von A nach B :

$$a_2 b_3 \underline{b_1} b_2 c_1, \quad a_2 b_4 \underline{b_2} b_1 c_1, \quad c_4 b_1 \underline{b_3} b_4 c_2, \quad a_1 b_2 \underline{b_4} b_3 c_1,$$

wobei jeweils die unterstrichenen Kontakte b entgegen dem ursprünglichen Sinne vom Strompfad durchflossen werden. Wir können also definieren:

Eine Schaltung ist vermascht, wenn in ihr nach Beseitigung sämtlicher Kupplungen Brückenkontakte vorkommen.

Es sei nun irgend eine Schaltung gegeben, die n verschiedene Punkte enthalte. Jede solche Schaltung muß dann mit einer anderen Schaltung, die wir als vollständiges n -Eck bezeichnen wollen, entweder identisch sein oder durch Spezialisierung aus ihr hervorgehen. Dabei sollen die Ecken des vollständigen n -Eckes den verschiedenen Punkten der Schaltung entsprechen, während die Seiten irgendwelche vorgegebene Admittanzen sind, vgl. für $n = 4$ (Abb. 20).

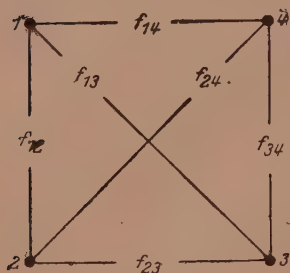


Abb. 20.

Die erwähnten Spezialisierungen bestehen einfach im Weglassen gewisser dieser Admittanzen, oder, wenn man will, darin, daß gewisse dieser Admittanzen konstant, und zwar gleich 0 angenommen werden.¹¹ Offenbar muß dabei $n \geq 4$ sein, wenn sich vermaschte Schaltungen ergeben sollen. Diese resultierende Admittanz F_{1n} ist dann gegeben durch die Parallelschaltung folgender Strompfade:

1. Die direkte Verbindung f_{1n} von 1 nach n .
2. Die $n - 2$ Verbindungen von 1 nach n über je einen Zwischenpunkt i ($i = 2, 3, \dots, n - 1$).
3. Die $\binom{n-2}{2} \cdot 2!$ Verbindungen von 1 nach n über je zwei Zwischenpunkte i, k ($i, k = 2, \dots, n - 1$), wobei aber die Wege $1 i k n$ und $1 k i n$ voneinander verschieden sind, so daß die Zahl der Verbindungen durch die Zahl der Variationen ohne Wiederholung von $n - 2$ Elementen zur zweiten Klasse gegeben ist.
- $n - 2$.) Die $\binom{n-2}{n-3} \cdot (n - 3)! = (n - 2)!$ Verbindungen von 1 nach n über $n - 3$ Zwischenpunkte in allen möglichen Anordnungen und schließlich
- $n - 1$.) die $\binom{n-2}{n-2} \cdot (n - 2)! = (n - 2)!$ Verbindungen von 1 nach n über alle $n - 2$ Zwischenpunkte $2, 3, \dots, n - 1$ in allen möglichen Anordnungen.

Die Zahl der Strompfade, also die Zahl der Glieder in der Normalform ist

$$N = \sum_{i=1}^{n-2} \binom{n-2}{i} \cdot i! \quad (62)$$

und für den Leitwert F_{1n} folgt

$$F_{1n} = f_{1n} + \sum_i f_{1i} f_{in} + \sum_{i,k} f_{1i} f_{ik} f_{kn} + \dots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{n-2}} f_{1i_1} f_{i_1 i_2} \dots f_{i_{n-3} i_{n-2}} f_{i_{n-2} n}, \quad (63)$$

wobei die Summen über alle Variationen der Zahlen $2, 3, \dots, n - 1$ ohne Wiederholung zur ersten, zweiten, \dots , $(n - 2)$ -ten Klasse zu erstrecken sind.

Für $n = 4$ ergibt sich also (Abb. 20)

$$F_{14} = f_{14} + f_{12} f_{24} + f_{13} f_{34} + f_{12} f_{23} f_{34} + f_{13} f_{32} f_{24}. \quad (64)$$

Ist $f_{14} = 0$, so ist das bis auf die Bezeichnungsweise identisch mit (55).

Es ist klar, daß sich aus (63) durch die oben erwähnte Spezialisierung weitere Fälle von vermaschten oder auch unvermaschten Schaltungen ergeben. Setzen wir z. B. in (64) andere $f_{ik} = 0$ als f_{14} , so ergibt sich immer eine unvermaschte Schaltung. Die Schaltung Abb. 19 entsteht aus dem vollständigen Sechseck durch Streichen

¹¹ Einer Admittanz den konstanten Wert ∞ zu erteilen, würde eine Verringerung der Zahl der unabhängigen Punkte, also den Übergang vom n - zum $(n - 1)$ -Eck bedeuten, so daß man dann nicht mehr gut von einer „Spezialisierung“ des n -Eckes reden könnte.

verschiedener Seiten (Nullsetzen der entsprechenden gegebenen Admittanzen) und durch eine Reihe von Kupplungen. Man vergleiche Abb. 21; es ist

$$\left. \begin{aligned} f_{12} = \bar{f}_{13} = a_1 = \bar{a}_2, \quad f_{14} = f_{15} = f_{16} = 0, \quad f_{23} = f_{26} = f_{36} = 0, \\ f_{24} = f_{35} = \bar{f}_{25} = \bar{f}_{34} = b_1 = \bar{b}_2, \quad f_{45} = 0, \quad f_{46} = f_{56} = c_1 = \bar{c}_2. \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

10. Beispiele.

1. Ein besonders häufiger Fall ist der, daß mehrere Verbraucher $A_1, A_2 \dots A_n$ an ein und dieselbe Stromquelle (Netz) geschaltet werden sollen. Bezeichnen wir mit f_i die gesuchte Admittanz zwischen dem Netz und dem Verbraucher A_i , so können wir die Schaltung mit allen Verbrauchern symbolisch durch

$$\Phi = f_1 A_1 + f_2 A_2 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n f_i A_i \quad (66)$$

darstellen. Mit Φ ist dabei zu rechnen wie mit einer höheren komplexen Zahl mit den Einheiten A_i . Man kann dann unter Umständen an (66) Vereinfachungen vornehmen, die bei getrennter Schreibweise der Admittanzen nicht so augenfällig sind. Haben die f_i alle einen gemeinsamen Faktor φ , sind sie also in der Form

$$f_i = \varphi \cdot \varphi_i \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (67)$$

darstellbar, so folgt aus (66)

$$\Phi = \varphi \cdot (\varphi_1 A_1 + \varphi_2 A_2 + \dots + \varphi_n A_n) = \varphi \cdot \sum_{i=1}^n \varphi_i A_i. \quad (68)$$

Den Formen (66) und (68) entsprechen die Schaltungen Abb. 22 und 23. N bedeutet das Netz. Die gezeichneten Leitungen und Admittanzen hat man sich dabei, je nachdem es sich um Zwei- oder Dreileitersysteme handelt, doppelt oder dreifach ausgeführt zu denken; bei Zweileitersystemen kann man auch, ähnlich wie in Abb. 14, N als den einen Leiter des Netzes ansehen und die Verbraucher A_i durch weitere Leitungen an den zweiten Netzleiter angeschlossen denken.

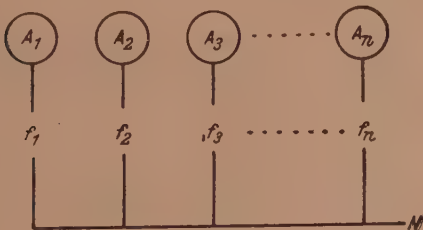


Abb. 22.

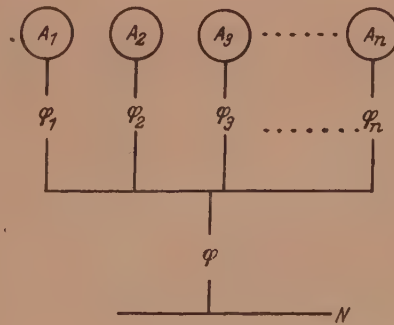


Abb. 23.

Die Admittanzen φ_i sind in der Regel einfacher als die f_i , so daß sich auf diese Art eine ganz beträchtliche Vereinfachung der Schaltung ergeben kann. Vgl. das folgende Beispiel 4.

2. Es seien drei Verbraucher A, B, C gegeben, die man wahlweise an das Netz schalten können soll, jedoch mit der Einschränkung, daß nie mehr als zwei dieser Verbraucher gleichzeitig angeschlossen werden sollen. Man kann dieser Forderung etwa dadurch genügen, daß beim Versuch, zu zwei bereits eingeschalteten Verbrauchern

den dritten dazuzuschalten, alle drei Verbraucher abgeschaltet werden. Wir versuchen, die Aufgabe zunächst mit drei zweistelligen Schaltern zu lösen. Die Grenzfunktion ist

$$\Gamma = \begin{matrix} 000 & + & 001 & + & 010 & + & 011 & + & 100 & + & 101 & + & 110 & + & 111, \\ 0 & C & B & B \cdot C & A & A \cdot C & A \cdot B & 0 \end{matrix} \quad (69)$$

wobei $a_i b_k c_l = i k l$ gesetzt ist, die Schalterstellungen zur Abkürzung mit 0 und 1 bezeichnet sind und die geforderten Zustände unter die entsprechenden Glieder von (69) geschrieben sind. Wir erhalten die drei Vollformen

$$f_A = a_1 b_0 c_0 + a_1 b_0 c_1 + a_1 b_1 c_0, \quad (70)$$

$$f_B = a_0 b_1 c_0 + a_0 b_1 c_1 + a_1 b_1 c_0, \quad (71)$$

$$f_C = a_0 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_1 + a_1 b_0 c_1. \quad (72)$$

Hier lassen sich sowohl Kürzungen als auch Heraushebungen vornehmen, und zwar wird

$$\Phi = (b_0 + c_0) a_1 A + (c_0 + a_0) b_1 B + (a_0 + b_0) c_1 C. \quad (73)$$

Wegen (40) können wir in jedem Klammerausdruck ein Glied hinzufügen, nämlich der Reihe nach a_0 , b_0 und c_0 ; der damit entstehende gemeinsame Faktor $\varphi = a_0 + b_0 + c_0$ kann herausgehoben werden und wir erhalten gemäß (68) weiter

$$\Phi = (a_0 + b_0 + c_0) (a_1 A + b_1 B + c_1 C). \quad (74)$$

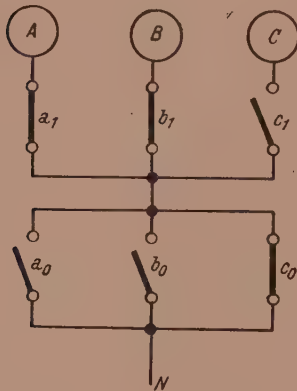


Abb. 24.

Die zugehörige Schaltung zeigt Abb. 24; die Kontakte a_0 und a_1 und ebenso die anderen lassen sich zu je einem Umschalter zusammenfassen, so daß man schließlich die einfache und elegante Lösung Abb. 25 erhält.

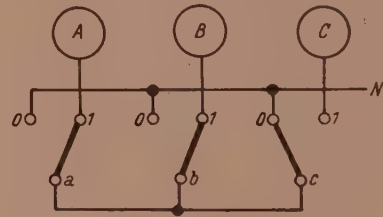


Abb. 25.

3. Wir modifizieren das Beispiel 2, indem wir verlangen, daß beim Versuch, zu zwei bereits eingeschalteten Verbrauchern den dritten dazuzuschalten, stets der Verbraucher C abgeschaltet werden soll (d. h. daß C überhaupt nicht eingeschaltet werden können soll, wenn A und B bereits angespeist sind, dagegen soll C abgeschaltet werden, wenn A und C oder B und C eingeschaltet waren und B bzw. A dazugeschaltet werden). Die Form (69) bleibt dieselbe, nur kommt unter das letzte Glied 111 statt 0 jetzt $A \cdot B$. Wir erhalten die drei Vollformen

$$f_A = a_1 b_0 c_0 + a_1 b_0 c_1 + a_1 b_1 c_0 + a_1 b_1 c_1, \quad (75)$$

$$f_B = a_0 b_1 c_0 + a_0 b_1 c_1 + a_1 b_1 c_0 + a_1 b_1 c_1, \quad (76)$$

$$f_C = a_0 b_0 c_1 + a_0 b_1 c_1 + a_1 b_0 c_1, \quad (77)$$

und daraus die reduzierten Formen

$$f_A = a_1, \quad f_B = b_1, \quad f_C = (a_0 + b_0) c_1, \quad (78)$$

also für die gesamte Schaltung

$$= a_1 A + b_1 B + (a_0 + b_0) c_1 C.$$

Ein Herausheben ist hier nicht mehr möglich, die Schaltung ist in Abb. 26 dargestellt.

4. Es sei das Dreieck von Abb. 27 mit den Admittanzen a, b, c gegeben. Es soll nun ein Sternpunkt geschaffen werden, d. h. es sollen Admittanzen x, y, z wie in Abb. 28 so bestimmt werden, und zwar allein durch a, b, c , daß die Sternschaltung

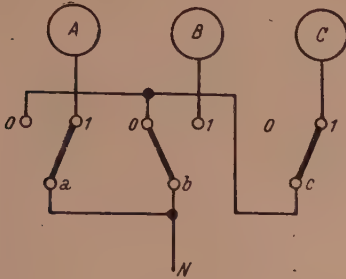


Abb. 26.

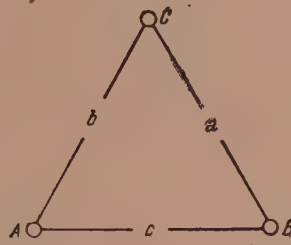


Abb. 27.

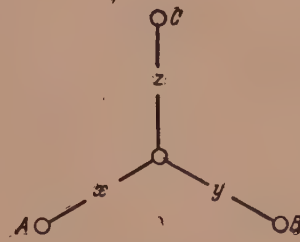


Abb. 28.

von Abb. 28 dasselbe leistet wie die Dreieckschaltung Abb. 27. Für die resultierenden Admittanzen zwischen je zwei Punkten A, B, C ergibt sich also

$$\left. \begin{aligned} F_{BC} &= a + b c = y z, \\ F_{CA} &= b + c a = z x, \\ F_{AB} &= c + a b = x y. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Aus diesen drei Gleichungen ist x, y, z zu berechnen. Wegen der Relation (11) und (12) vereinfachen sich die Rechnungen im Vergleich zur gewöhnlichen Algebra ganz wesentlich. Multiplizieren wir die linken und rechten Seiten der beiden letzten Gl. (79) miteinander, so folgt

$$z x \cdot x y = x y z = (b + c a) (c + a b) = b c + c a + a b$$

oder wegen der ersten Gl. (79)

$$x \cdot (a + b c) = b c + c a + a b; \quad (80)$$

es ist also

$$x = \frac{b c + c a + a b}{a + b c}. \quad (81)$$

Wir setzen $f = a + b c$, $g = b c + c a + a b$ und versuchen uns zunächst an Hand einer Tabelle über die Division Klarheit zu verschaffen:

Den Quotienten x haben wir dabei gemäß 5. bestimmt. Der Vergleich mit der letzten Spalte zeigt, daß wir jedenfalls

$$x = b + c \quad (82)$$

und analog zyklisch

$$y = c + a, \quad z = a + b \quad (83)$$

als Lösung von (79) nehmen können. Man kann diese Lösung aber auch direkt durch Ausführung der Division (81) erhalten. Wir schreiben

$$x = a (b + c) + b c : (a + b c)$$

und dividieren in ganz gewöhnlicher Weise durch, denn die Aufgabe ist ja genau dieselbe wie in der gewöhnlichen Algebra. Wir suchen ein Polynom, das, mit $a + b c$ multipliziert, $b c + c a + a b$ ergibt. Wir werden nur bei den Multiplikationen die

Tabelle 5.

a	b	c	f	g	x	b + c
∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	0	∞	∞	∞	∞
∞	0	∞	∞	∞	∞	∞
∞	0	0	∞	0	0	0
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
0	∞	0	0	0	beliebig	∞
0	0	∞	0	0	beliebig	∞
0	0	0	0	0	beliebig	0

einfacheren Regeln, die hier gelten, insbesondere (11) und (12) berücksichtigen. Wir erhalten so:

$$\begin{array}{r} a(b+c) + bc : (a+bc) = b+c \\ - \underline{a(b+c) \pm bc} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

denn a geht in $a(b+c)$ offenbar $b+c$ mal, während $(b+c)bc = b^2c + bc^2 = 2bc = bc$ ist; die Division geht auf und das Resultat stimmt mit (82) überein. Abb. 29 zeigt die Lösung der Aufgabe, die bei gewissen Anlaßschaltungen von Drehstromsynchronmotoren auch praktische Bedeutung hat.

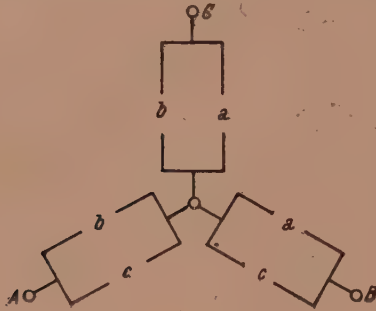


Abb. 29.

Es sei schließlich noch bemerkt, daß durchaus nicht alle Lösungen von (80), die etwa auf Grund der obigen Tabelle ermittelt wurden, auch Lösungen von (79) sind. So sind, wie man leicht nachrechnet, $x = g$, $x = b + c + a$, $x = b + ac$, $x = c + ab$, alles Lösungen von (80), aber keine Lösungen von (79).

11. Der Aussagenkalkül der algebraischen Logik und die Algebra der Schaltungen.

In der mathematischen Grundlagenforschung wurde in den letzten Jahrzehnten ein algebraischer Kalkül entwickelt, den man als Logikkalkül oder als algebraische Logik, mitunter auch als Logistik bezeichnet und der dem Zwecke dient, die logischen Verknüpfungen durch algebraische Relationen wiederzugeben. Ein Teil, und zwar der einfachste Teil dieses Kalküls, ist der sogenannte Aussagenkalkül, dessen Objekte die Aussagen sind, also Sätze wie: „der Tisch ist grün“, „Herr X geht spazieren“, „ $2 \times 2 = 4$ “, „der Kontakt a_1 ist geschlossen“, „zwischen den Punkten A und B besteht eine leitende Verbindung“ usw. Es zeigt sich nun, daß dieser Aussagenkalkül in seinem wesentlichen Teil mit unserer Algebra der elektrischen Schaltungen, wie wir sie in den vorhergehenden Abschnitten entwickelt haben, völlig identisch ist. Zum Nachweis dessen wollen wir zunächst die Grundgedanken des Aussagenkalküls kurz darlegen.¹² Bezeichnet man Aussagen mit kleinen lateinischen Buchstaben, so sind die wichtigsten Verknüpfungen:

1. Die Negation \bar{a} , gesprochen „Nicht- a “.
2. Die Disjunktion oder logische Summe $a + b$, „ a oder b “.
3. Die Konjunktion oder das logische Produkt $a \cdot b$, „ a und b “, besser „sowohl a als auch b “.

4. Die Äquivalenz oder logische Gleichheit $a = b$, „ a ist äquivalent b “.

Diese Verknüpfungen sind nicht alle voneinander unabhängig. Eine weitere in der Logistik besonders wichtige Verknüpfung ist die Implikation, meist $a \supset b$ geschrieben und „ a impliziert b “ gesprochen, die aber mit der Verknüpfung $a + b$ äquivalent ist und hier außer Betracht bleiben kann. Man erkennt nun unmittelbar, daß unsere ganze Schaltalgebra nichts anderes ist als ein Spezialfall der Logistik, wobei eben nur gewisse besondere Typen von Aussagen vorkommen; z. B. heißt hier a stets die Aussage: „der Kontakt a ist geschlossen“ oder „die Admittanz $a = (AB)$ stellt eine leitende Verbindung zwischen den Punkten A und B dar“.

¹² Vgl. hierzu A. N. Whitehead and B. Russell: Principia mathematica, 3 Bände. Cambridge. 1910–1913. — Hilbert-Ackermann: Grundzüge der theoretischen Logik. Berlin. 1928. — Carnap: Abriß der Logistik. Wien. 1929. — H. Reichenbach: Wahrscheinlichkeitslehre. Leiden. 1935. Zum ersten Überblick empfehlen wir besonders die Einführung in die Logistik im zweiten Abschnitt dieses Buches.

Wir sind einen anderen Weg gegangen. Wir haben nicht mit Aussagen operiert und keinen Aussagenkalkül entwickelt für die besonderen Aussagen der Schaltungstechnik, sondern wir sind viel konkreter vorgegangen, indem wir die Leitwerte der Verbindungen einführten und mit den Leitwerten rechneten; und nur weil sich die Leitwerte bei den Schaltungen auf die besonderen Werte ∞ und 0 beschränken, sind wir auch auf diesem Wege zu einem besonderen Kalkül gekommen. Daß dieser Kalkül aber mit dem Aussagenkalkül identisch ist, ergibt sich einfach daraus, daß die Grundoperationen (Summe und Produkt) in beiden Fällen dieselben sind und denselben formalen Gesetzen genügen. Im übrigen interessiert auch den Logistiker bei den Anwendungen seiner allgemeinen Untersuchungen auf besondere Probleme nicht nur die Aussage als solche, sondern auch ihr „Wahrheitswert“. Ist eine Aussage a wahr, so sagt man, ihr Wahrheitswert sei gleich 1 und schreibt das $W(a) = 1$, ist a falsch, so ist $W(a) = 0$. Erteilt man aber den wahren Aussagen nicht den Wahrheitswert 1, sondern den Wahrheitswert ∞ , so ist der Wahrheitswert jeder Aussage der Schaltungstechnik über einen Kontakt oder allgemeiner über eine beliebige Admittanz nichts anderes als der Leitwert der durch diesen Kontakt oder durch diese Admittanz hergestellten Verbindungen. Ist die Aussage a , „der Kontakt a ist geschlossen“, richtig, so ist $W(a) = \infty$, aber der Leitwert der durch a hergestellten Verbindung, oder wie wir immer schon kurz sagten, der Leitwert des Kontaktes a ist ebenfalls ∞ . Ist die Aussage a falsch, der Kontakt a also offen, so ist $W(a) = 0$, und dasselbe gilt vom Leitwert des Kontaktes a . Es ist also völlig gleichgültig, ob man mit a die Aussage oder deren Wahrheitswert, bzw. im Falle der Schalttechnik den Leitwert versteht, der Kalkül bleibt unter allen Umständen derselbe. Das mag vielleicht auch eine gewisse Bedeutung für die Logistik haben, die sich diese Erkenntnis offenbar durch die unzuweckmäßige Festsetzung, daß der Wahrheitswert einer richtigen Aussage gleich 1 sei, verschlossen hat.¹³ Jedenfalls erhält so die schon einmal erwähnte, fürs erste einigermaßen salopp anmutende Gewohnheit der Physiker und Elektrotechniker ihre Rechtfertigung, beispielsweise unter „Widerstand“ einmal ein ganzes Gerät, also ein konkretes physikalisches Objekt, das andere Mal aber eine Größe zu verstehen.

Aber noch eine weitere Erkenntnis gewinnen wir aus dieser Tatsache, nämlich die, daß unser ganzer Kalkül durchaus nicht auf elektrische Schaltungen beschränkt ist, sondern genau so gut für die Schaltungen der Mechanik oder insbesondere der Hydromechanik anwendbar ist. In letzterem Falle kann man auch wieder vom Leitwert einer Verbindung sprechen. Bei einer aus lauter starren Körpern bestehenden Schaltung (Gestänge, Getriebe od. dgl.) könnte man etwa den Elastizitätsmodul einer Verbindung an Stelle eines hier nichtssagenden Leitwertes nehmen.

Zusammenfassung.

Die für die Entwicklung der Schaltalgebra grundlegenden Begriffe sind einerseits der Begriff der zu zwei Punkten einer Schaltung gehörigen oder, wie wir auch sagen, der Schaltung entnommenen Admittanz und andererseits der Begriff der beschreibenden Funktion einer Admittanz. Diese beschreibende Funktion wurde zunächst als Funktion gewisser Variabler eingeführt, die die Stellung der Schalter charakterisieren. Nach Einführung der Kontakte als einfachster Bauelemente einer Schaltung wurden dann andere Variable, nämlich die Leitwerte der Kontakte selbst, als unabhängige Variable eingeführt und damit auch eine für die praktische Rechnung geeignete Grundlage

¹³ Auch die Einführung der Wahrscheinlichkeitsimplikation bei Reichenbach läßt sich durchaus hier einordnen, wenn man als Wahrheitswert einer Wahrscheinlichkeitsaussage nicht die Wahrscheinlichkeit p , sondern den Ausdruck $p/p - 1$ nimmt.

gefunden. Aus den Schaltbedingungen gewinnt man durch einen mathematischen Ansatz, für den sich allerdings hier so wenig wie in anderen Gebieten der angewandten Mathematik starre Regeln angeben lassen, zunächst die Grenzfunktion der Schaltung, aus dieser die Vollformen der einzelnen Admittanzen, die dann durch Kürzungen in die Normalformen übergeführt werden. Wenn man diese Normalformen noch durch alle möglichen Heraushebungen vereinfacht und insbesondere die Vermaschungen entsprechend berücksichtigt, so gelangt man schließlich durch den Übergang zur graphischen Darstellung zu den einfachsten Schaltbildern, die die gegebenen Schaltbedingungen lösen. Mitunter ist es möglich, direkt aus den Schaltbedingungen schon gekürzte Formen einzelner Admittanzen anzugeben. In 8. werden insbesondere die Kehrschaltungen behandelt und ein Verfahren angegeben, wie man auf einfache Weise zu einer gegebenen Schaltung die Kehrschaltung findet. 10. enthält eine Reihe durchgerechneter einfacherer Beispiele, die aber doch einen gewissen Einblick in die Bedeutung des Kalküls geben dürften.

(Eingegangen am 2. Mai 1946.)

Drehmoment einer homogen magnetisierten Kugel in einem Magnetfeld.

Von F. Halla und L. Castelliz, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Es wird das Drehmoment der Kugel in einem zu ihrer Magnetisierungsrichtung senkrechten Felde berechnet, und zwar in dem a) eines Kreisstromes, b) eines Solenoids. Sodann werden Kurven für die numerische Integration unter den speziellen Bedingungen des Fluxmeters nach Schultz gegeben.

Gelegentlich der Verwendung eines Fluxmeters nach Schultz¹ zur Messung von magnetischen Suszeptibilitäten standen wir vor der Aufgabe, das Drehmoment zu berechnen, das eine in einer bestimmten Richtung homogen magnetisierte Kugel auf ein drehbares Solenoid ausübt. Da dieses Problem für ähnlich gebaute Apparate ein gewisses Interesse besitzt und in der von uns eingesehenen Handbuchliteratur nicht behandelt ist, halten wir uns für berechtigt, über unsere Ergebnisse zu berichten.

Bei der Methode von Schultz befindet sich zwischen den Polen eines kräftigen Magneten (Feldstärke \mathfrak{H}_h) ein um eine Achse (senkrecht zur Körperachse) drehbarer Hohlzylinder, der an seinem oberen und an seinem unteren Rande gleichartige Drahtspulen trägt, die von demselben Strom — aber in entgegengesetzter Richtung — durchflossen werden; die von den beiden Spulen herrührenden Drehmomente kompensieren sich derart gerade. Wird nun von oben her ein kugelförmiger Probekörper aus dem zu untersuchenden Material in die obere Spule eingeschoben und fixiert, so erfährt die obere Spule, infolge ihres eigenen magnetischen Kraftfeldes \mathfrak{H}_z , bei Einführung dieser durch \mathfrak{H}_h magnetisierten Kugel ein zusätzliches Drehmoment. Durch einen Nebenschluß kann nun die Stromstärke I in der oberen Spule so weit geschwächt werden, daß das Drehmoment der unteren Spule zur Kompensation der beiden auf das obere Ende wirkenden Drehmomente ausreicht und der Zylinder wieder die Nullage einnimmt. Der für diese Schwächung erforderliche Widerstand des Nebenschlusses ist durch die Suszeptibilität der Probe bestimmt.

Da die Lage der Spule im Anfangs- und im Endzustand dieselbe ist, läßt sich

¹ B. H. Schultz: Physica 6, 137 (1939).

das Drehmoment auf die Spule nach dem Prinzip der Gleichheit von actio und reactio berechnen.

Wir lösen diese Aufgabe in zwei Schritten, zunächst für eine einzige kreisförmige Stromwindung, dann für ein Solenoid. Wir betrachten eine Probekugel (Abb. 1) vom Radius R und einen kreisförmigen Leiter vom Radius a , in dessen Mittelpunkt der Ursprung O liegt. Ein Aufpunkt im Innern der Kugel ist durch die Zylinderkoordinaten ϱ, φ, z gekennzeichnet; . . . ; wir messen ϱ in Vielfachen von R als Einheitsmaßstab, so daß $\varrho = R$ also zunächst den Wert 1 erhält. Der Durchsichtigkeit der Ableitung zuliebe behalten wir, solange wir nicht zu numerischen Werten übergehen, die Bezeichnung R bei.

Fließt durch den Leiter ein Strom der Stärke I , so sind die räumliche Anordnung und das durch den Strom erregte Feld \mathfrak{H} axialsymmetrisch um die Senkrechte zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt (z -Achse). Das zu suchende Drehmoment setzt sich additiv zusammen aus den Drehmomenten der einzelnen in der Kugel enthaltenen Elementarmagnete vom Momente $\mathfrak{M} \cdot d\tau$ im Felde \mathfrak{H}_z , da für eine Drehung um die in der y -Richtung laufende Drehachse der Spule, bzw. des kreisförmigen Leiters nur diese Komponente von \mathfrak{H} in Frage kommt. Die Magnetisierung je Volumeinheit, \mathfrak{M} , ist in unserem Falle, in dem das Feld \mathfrak{H}_h des erregenden Magneten in der x -Richtung zu denken ist, gegeben durch

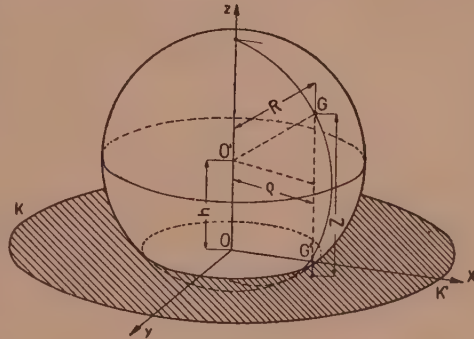


Abb. 1. Gegenseitige Orientierung von Kreisstrom $K K'$ und magnetisierter Kugel.

$$\mathfrak{M} = \frac{\chi}{1 + \frac{4}{3} \pi \chi} \cdot \mathfrak{H}_h,$$

das gefragte Drehmoment sonach durch

$$\mathfrak{D} = \frac{3 \chi \mathfrak{H}_h}{3 + 4 \pi \chi} \int_{\text{Kugel}} \mathfrak{H}_z d\tau. \quad (1)$$

Die Feldstärke \mathfrak{H}_z (in rationellen Einheiten) ergibt sich aus dem Vektorpotential²

$$\mathfrak{A}_\varphi = \frac{1}{\pi c} \sqrt{\frac{a}{\varrho}} \cdot \frac{1}{k} \left[\left(1 - \frac{k^2}{2} \right) K(k) - E(k) \right], \quad (2)$$

worin K und E die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Ordnung und k deren Modul

$$k^2 = \frac{4 a \varrho}{(a + \varrho)^2 + z^2} \quad (3)$$

sind.

Hieraus läßt sich nach

$$\mathfrak{H}_z = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \varrho \mathfrak{A}_\varphi$$

unter Einführung der bekannten Ausdrücke für $\partial K / \partial k$ und $\partial E / \partial k$ durch elementare Umformung der trotz seiner Einfachheit bei Debye l. c. nicht vermerkte Ausdruck

$$\mathfrak{H}_z = I \cdot H(z, \varrho) \quad (4)$$

berechnen, worin

$$H(z, \varrho) = \frac{k}{\sqrt{a \varrho}} \left\{ K(k) + \frac{\frac{1}{2} k^2 \left(\frac{a}{\varrho} + 1 \right) - 1}{1 - k^2} E(k) \right\} \quad (5)$$

² G. M. Minchin: Philos. Mag. J. Sci. (5), **35**, 354 (1893). — Vgl. etwa P. Debye: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. V/2, S. 395f. Leipzig. 1916.

gesetzt ist und statt der in (2) verwendeten rationellen (Heaviside-) Einheiten bereits absolute e. m.-Einheiten eingeführt sind.

Zweckmäßig wird das Volumelement $d\tau$ durch

$$d\tau = \varrho \, d\varphi \, d\varrho \, dz$$

dargestellt und bei der Ausführung des dreifachen Integrals in (1) die Integration nach φ durch Vorziehen von 2π vor das verbleibende Doppelintegral erledigt. Die Integration nach z hat aber von ϱ abhängige Grenzen (GG' in Abb. 1, in der der Kugelmittelpunkt $0'$ im Abstand h über der Kreisebene liegt).

Schreiben wir für die angegebenen Grenzen $z = h \pm w$, wobei $w \equiv \sqrt{R^2 - \varrho^2} = \sqrt{1 - \varrho^2}$ bedeutet, so nimmt (1) schließlich die Form

$$\mathfrak{D} = \frac{6\pi I \cdot \xi_h \chi}{3 + 4\pi \chi} R^2 \int_{\varrho=0}^{\varrho=R} \int_{z=h-w}^{z=h+w} \varrho H(z, \varrho) dz d\varrho \quad (6)$$

an, deren Auswertung nur mehr graphisch möglich ist.

Wir bemerken, daß in (6) der Integrand

$$G(z, \varrho) \equiv \varrho H(z, \varrho) = k \sqrt{\frac{\varrho}{a}} \cdot \left\{ K + \frac{\frac{1}{2} k^2 \left(\frac{a}{\varrho} + 1 \right) - 1}{1 - k^2} E \right\} \quad (7)$$

in der Länge von nullter, das Integral selbst daher von zweiter Dimension ist, so daß beim Übergang von unseren relativen Koordinaten zu absoluten Einheiten noch mit R^2 multipliziert werden muß, wie dies in (6) auch bereits geschehen ist.

Da G außer von R auch noch von a abhängt, ist es nicht möglich, durch die graphische Auswertung ein Ergebnis von allgemeiner Gültigkeit zu erhalten. Wir führen daher die Rechnung für die speziellen Abmessungen unserer Apparatur durch. Es war (in rel. Einheiten)

$$R = 1.00,$$

$$a = 10/6 = 1.6,$$

$$b = 2h = 0.95 \text{ (Breite einer Spule).}$$

Wir berechnen zunächst zahlenmäßig die Werte der Funktion $G(z_j, \varrho_i)$, für eine hinreichende Anzahl von Wertepaaren (ϱ_i, z_j) im Bereiche $\varrho_i = i \cdot 0.1$; $z_j = j \cdot 0.1$, wobei $i, j = 1, 2 \dots 10$. Wir fassen diese Werte zu Kurven $G(z, \varrho_i)$ zusammen, die wir als Funktionen von z auftragen. Diese Kurven sind in Abb. 2, bis $j = 15$ fortgesetzt, wiedergegeben.

$G(z, 0)$ verschwindet im ganzen Bereiche von z , da in (7) innerhalb der Klammer

$$\lim_{\varrho=0} \frac{k^2 a}{2\varrho} = \frac{2a^2}{a^2 + z^2},$$

also endlich ist. Für große Werte von z ist $k \sim 0$ und $\lim G = 0$ wegen $K(0) = E(0) = \pi/2$, die Kurven nähern sich also asymptotisch der z -Achse, wie es wegen der mit wachsender Entfernung abnehmenden Feldstärke sein muß. Für kleine Werte von ϱ besteht annähernd die projektive Beziehung

$$G(\varrho_i)/G(\varrho_j) = \varrho_i/\varrho_j$$

bei festgehaltenem z . Die Abhängigkeit des Drehmoments von h wird erst bei der Integration nach z wirksam, und zwar in den Grenzen des Integrals.

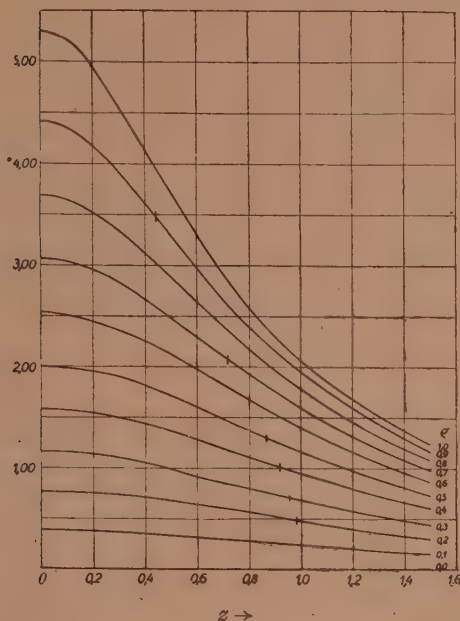
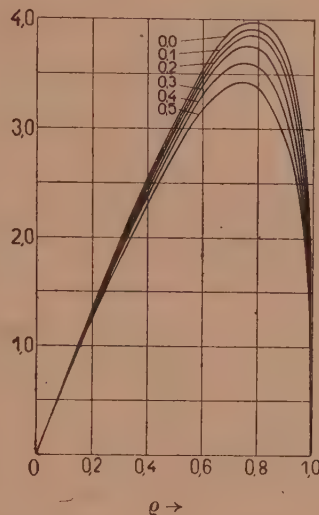
Da G eine gerade Funktion von z ist, gilt, wie man sich leicht überzeugt, für $w > h$

$$L(\varrho_i, h) \equiv \int_{h-w}^{h+w} G(\varrho_i, z) dz = 2 \int_0^{w-h} + \int_{w-h}^w < 2 \int_0^w,$$

da für $h \neq 0$ die Flächenstücke nicht mehr symmetrisch zur Ordinatenachse liegen.

³ Im Falle $h = 0$ (Kreisstrom im Kugelmeridian).

Die Integrationsgrenzen für den Fall $h = 0$ (Ebene des Stromkreises im Kugel-äquator) sind in Abb. 2 auf den Kurven durch vertikale Striche markiert.

Abb. 2. $g(z)$ für verschiedene Werte von q_i .Abb. 3. L -Kurven für verschiedene Werte von h .

$L(q_i, h)$ gibt die Beiträge zum Drehmoment, herrührend von jenen magnetischen Dipolen, die (innerhalb der Kugel) auf einem Zylinder $q_i = \text{const.}$ liegen. Für $q = 0$ und $q = R = 1$ verschwindet L , in ersterem Falle, weil die Dipollänge $= 0$ ist, in letzterem, weil am Äquator der Kugel die Menge der Dipole auf 0 heruntergesunken ist.

Schließlich bilden wir durch Auftragen der $L(q_i, h)$ -Werte und Planimetrieren in Abb. 3 die Integrale

$$\Delta(h) = \int_0^R L(q, h) dq$$

für eine Reihe von h -Werten ($h = 0.0$ bis 0.5). Mit den obigen Zahlenwerten ergeben sich die folgenden Werte von $\Delta(h)$

h	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\Delta(h)$	2.514	2.490	2.460	2.407	2.335	2.247

mit einer Fehlergrenze von $\pm 1.5\%$, die durch die wiederholte Planimetrierung bedingt ist.

Die obigen Werte von $\Delta(h)$ können nun zur Lösung der Frage nach dem Drehmoment eines Solenoides (statt eines einzelnen Kreisstromes) dienen. Enthält eine Spule der Breite b je Längeneinheit Z/b Windungen, so ist die Wirkung der Spule gegeben durch

$$\frac{Z}{b} \int_{h_0}^{h_0+b} \Delta(h) dh,$$

was für den symmetrischen Fall (die Spule liegt zur Hälfte unter, zur Hälfte über der Äquatorebene der Kugel) übergeht in

$$\frac{Z}{b} \cdot 2 \cdot \int_0^{b/2} \Delta(h) dh.$$

Tragen wir in Abb. 4 die oben angegebenen Werte von $\Delta(h)$ gegen h auf und planimetrieren das Flächenstück zwischen den Abszissenwerten 0 und $0.95/2$, so erhalten wir für vorstehenden Ausdruck den Wert 2.35, der von dem Wert für den einfachen Kreisstrom nur um etwa 5% abweicht.

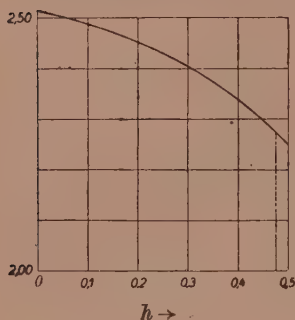


Abb. 4. Kurve $\Delta(h)$.

(6) geht im symmetrischen Fall über in

$$= \frac{12 \pi I \mathfrak{G}_h \cdot Z \cdot R^2 \chi}{(3 + 4 \pi \chi) b} \cdot 2.35.$$

Auf dem gleichen Wege läßt sich zeigen, daß die Wirkung einer Spule auf die Kugel auf etwa 9% des ursprünglichen Wertes abklingt, wenn der vertikale Abstand des Kugelmittelpunktes von dem der Spule von 0 auf 3.5 rel. Einheiten wächst.

Wir danken Herrn F. Götzl für die Ausführung der Umzeichnungen.

Zusammenfassung.

Im Falle eines Kreisstroms kann für die gestellte Aufgabe ein expliziter Ausdruck angegeben werden; die Lösung für den Fall eines Solenoids ist nur für spezielle Werte durch numerische Integration zu erhalten. Diese wird für die üblichen Dimensionen eines Fluxmeters nach Schultz durchgeführt und der Einfluß von geänderten Bedingungen kurz erörtert.

(Eingegangen am 6. Juni 1946.)

Die Einhüllende als Mittel zur Lösung technischer Probleme.

Von J. Eckert, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Eine mir einst gestellte Aufgabe lief darauf hinaus, daß

1. eine unregelmäßige, ebene Fläche in einem bestimmten Verhältnis zu teilen sei, so daß sich die Flächenteile

$$f_1 : f_2 = k$$

verhielten und

2. die statischen Momente der Flächenteile in bezug auf eine Gerade ($a b$) im Verhältnis m stünden, also

$$St_1 : St_2 = m.$$

Die Lösung ist aus den Abb. 1a und 1b ersichtlich. Die durch den Linienzug L umgrenzte Gesamtfläche ($f_1 + f_2$) wird nach verschiedenen Richtungen durch Gerade 1, 2, 3, 4... unterteilt, das Flächenverhältnis der Teilflächen von einer Basislinie $I-II$ aus aufgetragen, was die Fehlerkurve G_k ergibt. Schneidet man nun mit der Verhältnisziffer k ein, so wird durch die Gerade G_1 die erste Bedingung der gestellten Aufgabe $f_1 : f_2 = k$ gelöst.

Wiederholt man nach verschiedenen Richtungen dieses Verfahren, so kann man die Geraden $G_1, G_2, G_3 \dots$ als Tangenten an eine Kurve ansehen, die die Eigenschaft hat, daß jede sie berührende Gerade die Fläche ($f_1 + f_2$) im gewünschten Verhältnis k teilt.

Trägt man nun von einem Pol 0 auf zu den Geraden G_1, G_2 parallelen Strahlen G'_1, G'_2 den zu jeder Geraden G gehörigen Wert des Verhältnisses der statischen Momente

der Teilflächen in bezug auf $(a\ b)$ auf und schlägt man mit 0 als Mittelpunkt einen Kreis mit dem verlangten Momentenverhältnis „ m “ als Radius, so schneidet dieser Kreis die Verbindungslinie der Endpunkte der Momentenlinie. Diese Schnittpunkte, mit 0 verbunden, geben die Richtung der Tangenten an die Einhüllende an, die jene Flächenteile von $(f_1 + f_2)$ abtrennen, deren statisches Moment der zweiten gestellten Bedingung, nämlich $St_1 : St_2 = m$, genügt.

Die eingangs gestellten Forderungen der Flächenteilung im Verhältnis k und der Momentenquotient m sind erfüllt. Es stellte sich heraus, daß dieses Verfahren zur Lösung verschiedener technischer Aufgaben herangezogen werden kann.

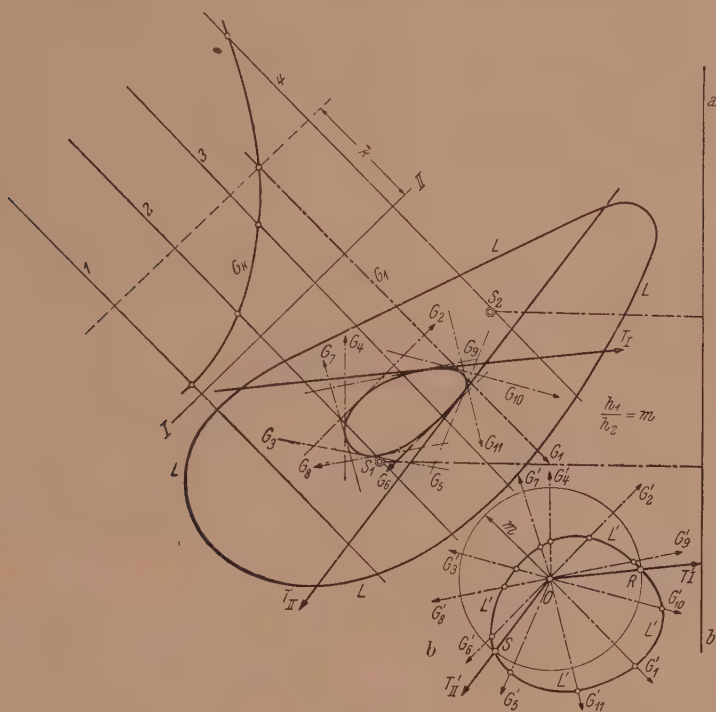


Abb. 1 a, b.

Der beiderseits eingespannte, ungleich belastete Träger.

I. Die Lösung der Aufgabe erfolgt auf Grund der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} = \mp \frac{M}{EJ}$. Damit ergibt sich für $\frac{dy}{dx} = \text{tg } \beta_x$ der Wert $\text{tg } \beta_x = \int \frac{M}{EJ} \cdot dx + C_1$ und für die Durchbiegung bei weiterer Integration die Gleichung

$$f_x = \int dx \int \frac{M}{EJ} \cdot dx + C_1 \int dx + C_2.$$

Für das hier zu behandelnde Problem des beiderseitig eingespannten Trägers gelten die Randbedingungen, daß sowohl die Tangente als auch die Durchbiegungswerte im linken und rechten Auflager gleich Null werden. Damit entfallen in obigen Gleichungen die Konstanten (Abb. 2).

Es gilt somit, die $\frac{M}{EJ}$ -Linie durch die Einspannmomentenlinie so zu teilen, daß die Gleichungen für $\text{tg } \beta$ und f erfüllt werden.

Man denkt sich nun die Aufgabe gelöst und zieht von willkürlich angenommenen Punkten I und II Strahlen, die, obwohl falsch, Lösungen darstellen sollen. Es ergibt

sich für jeden Strahl ein $\operatorname{tg} \beta_B$ -Wert; diese Werte werden als Fehlerkurve auf den Strahlen von *I* und *II* aus aufgetragen und es ergibt sich jeweils ein Schnitt mit *BB*,

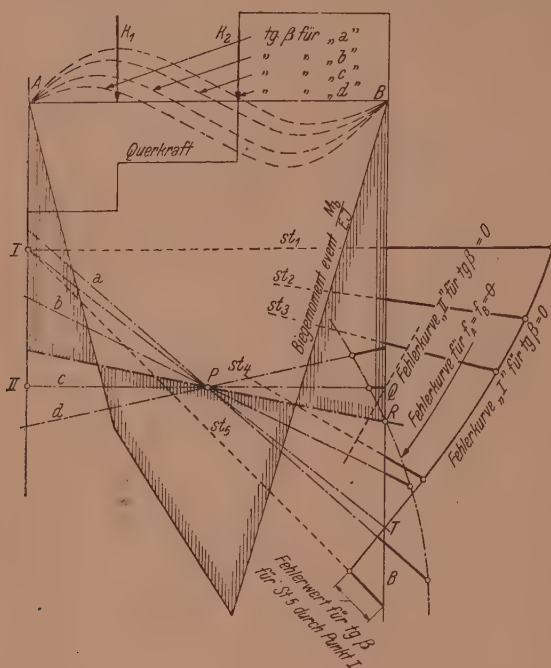


Abb. 2.

so daß die Verbindungslinie die Bedingung $\operatorname{tg} \beta_A = \operatorname{tg} \beta_B = 0$ erfüllt. Diesen Rechnungsgang mit dem Planimeter vollführt man jetzt für die Punkte *I* und *II* sowie einem weiteren Punkt *III*, wobei sich ergibt, daß sich die Einhüllende der Abb. 1a auf einen Punkt *P* reduziert. Denn ein Punkt der Geraden *TI* muß der wirklichen Lösung zugehören und durch diesen Punkt müssen auch alle anderen Fehllösungen gehen.

Man braucht jetzt nur mehr die zweite Integration in gleicher Weise durchzuführen, indem man durch *P* verschiedene Strahlen zieht und vom Schnittpunkt der Fehlerkurve für die gewonnenen Werte f_B zum gemeinschaftlichen Schnittpunkt aller Lösungen für $\operatorname{tg} \beta$ die Verbindungslinie zu ziehen, um die Aufgabe erledigt zu haben.

II. Eine weitere Anwendung liegt auf dem Gebiete der Schwingungsrechnung bei der Ermittlung der

Knotenpunkte für den Fall nichthomogener Stabbelastung (Abb. 3).

Hier sind die beiden Bedingungen

$$\Sigma (m r \omega^2) = 0 \quad \text{und} \quad \Sigma (m r \omega^2 x) = 0$$

zu befriedigen. Weder die Lage von k_1 noch die von k_2 sind bekannt. Da ω für jede Schwingungsweite den gleichen Wert hat, bedarf es nur der Lösung

$$\Sigma (m r) = 0 \quad (\text{Summe der Kräfte} = 0),$$

$$\Sigma (m r x) = 0 \quad (\text{Summe der Momente} = 0).$$

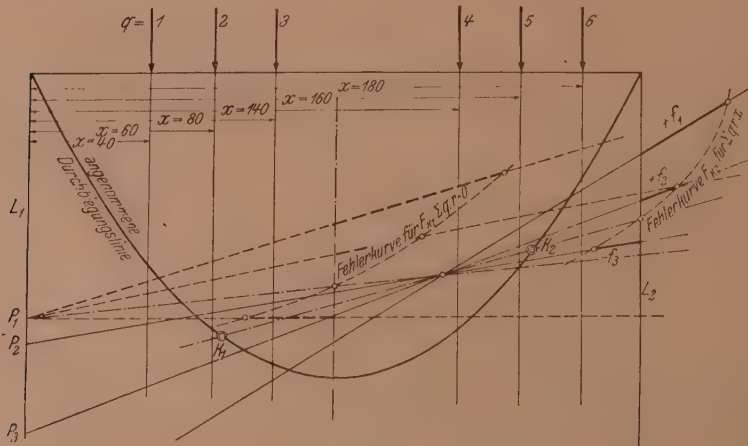


Abb. 3.

Für den Stab wird eine Durchbiegung angenommen, die die elastische Linie beim Schwingungsvorgang darstellen soll; ihre Korrektur erfolgt nach der Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit nach der Durchführung der Rechnung durch den Ersatz der Massen m , die den Stab belasten, durch die Massenfliehkraftswirkungen. Das aber ist hier nicht weiter zu behandeln.

An Lot L_1 werden die Punkte $P_1, P_2, P_3 \dots$ angenommen und Strahlen gegen L_2 gezogen; es schneidet jeder Strahl die Biegelinie in zwei Punkten, die Knotenpunkte sein können. Jetzt ist man in der Lage, für jeden Strahl

$$\Sigma (m r) = 0$$

zu berechnen. Die Fehlerkurve FK_1 läßt jenen Strahl ermitteln, der, durch P_1 gehend, diese Bedingung erfüllt.

Durch Heranziehung aller jener Strahlen (je einer durch $P_1, P_2, P_3 \dots$) und der Berechnung einer Fehlerkurve FK_2 findet das Problem seine Lösung. Die Strecken

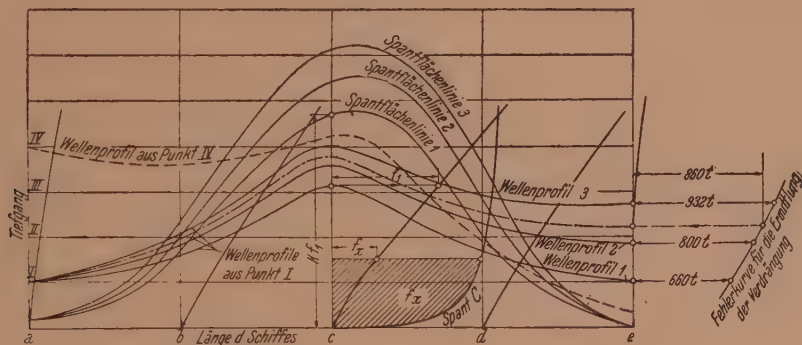


Abb. 4.

$+f_1, +f_2, -f_3$ sind die sich für die Strahlen aus P_1, P_2, P_3 ergebenden Differenzen, entgegen der Bedingung $\Sigma (m r x) = 0$.

III. Das Fachgebiet Schiffbau bedarf oft der Lösungen, daß Gleichheit zwischen Schiffgewicht und Verdrängung und Übereinstimmung des Gewichts- und des Verdrängungsschwerpunktes vorliegt. Eine Lösung mit Hilfe einer oder zweier Bedingungsgleichungen ist wegen der mathematisch nicht faßbaren Schiffsform ausgeschlossen. Gewöhnlich findet man die Lösung durch gefühlsmäßiges Probieren. Mit vorliegender Methode ist ein zum Ziel führender Weg gegeben. Im Falle der Längsfestigkeitsrechnung für Schiffe arten die Geraden aus den Punkten I, II, III nach B in die Linie des Wellenprofils aus. Der Ausmittlungsvorgang erleidet dadurch keine Änderung (Abb. 4).

Zusammenfassung.

An drei Beispielen wird gezeigt, wie mit Hilfe zweier Fehlerkurven Aufgaben zu lösen sind von der Form

$$a = f(p),$$

$$b = f(q),$$

ohne daß für die beiden Bedingungen ein innerer Zusammenhang bestehen muß.

(Eingegangen am 29. Mai 1946.)

Berichte.

Das Turbulenzproblem.

Von F. Kracmar, Wien.

(Zusammenfassender Bericht über Arbeiten aus den Jahren 1933 bis 1938.)

II. Ausgebildete Turbulenz.*

a) Neuere Theorien der Turbulenz.

Die Gesetzmäßigkeiten der ausgebildeten, turbulenten Strömung an glatten und rauhen Wänden wurden zusammenfassend von L. Prandtl¹ behandelt. Seine Darstellung der Erscheinungen fußt auf dem schon früher eingeführten Begriff des „Mischungsweges“², wobei er für die Schubspannung den Ausdruck

$$\tau = \varrho l^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2$$

erhält. Dabei stellt $\frac{du}{dy}$ das Geschwindigkeitsgefälle senkrecht zur Strömungsrichtung dar. Mit der Annahme, daß in der Wandnähe $\tau = \text{const.}$ und $l = \kappa y$ (y = Wandabstand) ist, ergibt sich mit der Einführung der Reibungsgeschwindigkeit $v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$ die Geschwindigkeitsverteilung der ausgebildeten turbulenten Strömung an glatten Wänden als

$$u = \frac{1}{\kappa} v^* (\ln y + \text{const.}).$$

Der Wert der Konstanten κ ergibt sich aus Versuchsergebnissen mit ungefähr 0.4.

Für rauhe Wände, deren geometrisch ähnliche Rauigkeiten durch die Korngröße k bestimmt sind, muß für diejenigen Fälle, bei denen die Zähigkeit keine Rolle spielt, u eine Funktion von $\frac{y}{k}$ sein. So wird für eine Versuchsreihe von Nikuradse³ die Geschwindigkeitsverteilung durch die Beziehung

$$u = 2.5 v^* \ln \left(30 \frac{y}{k} \right)$$

dargestellt. Ersetzt man diese Formel durch $u = 2.5 v^* \left(1 + 30 \frac{y}{k} \right)$, so ist für $y = 0$ auch $u = 0$, was bei der früher angegebenen Gleichung für u nicht der Fall war, und es kann daher an die letztere Beziehung der Grenzübergang zum Fall der idealen Flüssigkeit und der ideal glatten Wand angeknüpft werden.

Die Geschwindigkeitsverteilung der ausgebildeten, turbulenten Strömung in einem glatten Rohr errechnet sich aus der Beziehung

$$u_{\max} - u = 2.5 v^* \ln \left(\frac{r}{y} \right)$$

bzw.

$$u_{\max} - \bar{u} = 4.07 v^*.$$

u_{\max} bzw. \bar{u} bedeuten die maximale bzw. mittlere Geschwindigkeit im Rohr.

Für Strömungen in rauhen Rohren ergibt sich

$$u_{\max} = v^* \left(5.75 \log \frac{r}{k} + 8.5 \right)$$

bzw.

$$\bar{u} = v^* \left(5.75 \log \frac{r}{k} + 4.43 \right).$$

* Wird fortgesetzt.

Daraus ergibt sich für die Widerstandszahl λ die Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log \frac{r}{k} + 1.74,$$

welche mit den Versuchsergebnissen von Nikuradse gut übereinstimmt.

Um den Einfluß der Zähigkeit zu berücksichtigen, wird an Stelle von k eine Größe $k' = k \cdot f \left(v^* \frac{k}{\nu} \right)$ eingeführt. Für große Werte $v^* \frac{k}{\nu}$ wird $f = 1$, während bei sehr kleinen Werten $v^* \frac{k}{\nu}$ der Einfluß der Rauigkeit verschwindet, so daß k aus der Formel herausfallen muß. Es gilt dann $f = \text{Zahl} \cdot \frac{\nu}{v^* k}$, so daß $k' = \text{Zahl} \cdot \frac{\nu}{v^*}$ sein muß. Für die Geschwindigkeit in Wandnähe ergibt sich an Stelle von $u = 2.5 v^* \ln \left(30 \frac{y}{k} \right)$ die Beziehung

$$u = 2.5 v^* \ln \left(9 v^* \frac{y}{\nu} \right).$$

Ebenso erhält man für die Maximalgeschwindigkeit im glatten Rohr die Gleichung

$$u_{\max} = v^* \left(5.75 \log v^* \frac{r}{\nu} + 5.5 \right).$$

Für die Widerstandszahl gilt dabei die Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log (Re \sqrt{\lambda}) - 0.8.$$

Abschließend wird in dieser Arbeit von Prandtl die Übertragung der für die ausgebildete Wand- und Rohrströmung erhaltenen Ergebnisse auf die Fälle des Plattenwiderstandes und der beschleunigten bzw. verzögerten Bewegungen betrachtet. Für die Reibungswiderstandszahl der Platte C_f wird die von Schlichting ermittelte Näherungsformel

$$C_f = \frac{0.455}{\left(\log \frac{v l}{\nu} \right)} 2.58$$

angegeben. In derselben bedeuten: v Geschwindigkeit der Platte, l Plattenlänge.

W. Tollmien⁴ wendet die Kármánsche Ähnlichkeitshypothese, nach welcher sich für den Mischungsweg $l = \kappa \left| \frac{\partial u}{\partial y} / \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|$ ergibt, wobei κ eine universelle Konstante ist, auf das ebene Windschattenproblem an. Für dasselbe wurde schon früher von Prandtl die Annahme gemacht, daß der Mischungsweg über den Querschnitt konstant ist. Nachdem nun der Kármánsche Ansatz für l an denjenigen Stellen versagt, an welchen das Geschwindigkeitsprofil ein Extremum oder einen Wendepunkt besitzt, so werden zwei Ergänzungshypothesen eingeführt: 1. In einer geringen Umgebung der Nachlaufmitte wird der Mischungsweg konstant angenommen. 2. Der Wendepunkt wird ersetzt durch einen Flexionspunkt, wo die Krümmung sprunghaft ihr Vorzeichen ändert. In diesem Flexionspunkt ist $\frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$ und $\frac{\partial l}{\partial y}$ springt auf den entgegengesetzt gleichen Wert. Während die Breite des Windschattens in großem Abstand hinter dem Körper nach der Funktion $x^{1/2}$ anwächst, nimmt die maximale Nachlaufgeschwindigkeit mit $x^{-1/2}$ ab. Aus der Integration der Bewegungsgleichung für große x ergeben sich eine Reihe von Geschwindigkeitsprofilen. Zur Festlegung des Windschattens ist außer dem Widerstand des Körpers noch eine Angabe über das Ausgangsprofil erforderlich. Aus den Rechnungen ergibt sich eine Grenzform der Geschwindigkeitsverteilung, nämlich bei sonst gleichen Verhältnissen eine obere Grenze für die Nachlaufgeschwindigkeit in der Mitte und eine untere Grenze für die Nachlaufbreite und das Verhältnis von Mischungsweg zu Nachlaufbreite. Die errechnete Verteilung des Mischungsweges kann mit guter Näherung durch die von Prandtl vorgeschlagene

konstante Verteilung ersetzt werden. In guter Übereinstimmung mit früheren Bestimmungen ergibt sich der Zahlwert für die universelle Konstante α aus Windschattenmessungen zwischen 0.4 und 0.5.

Ausgehend von der Taylorschen Wirbelaustauschtheorie⁵ behandelt S. Tomotika⁶ die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilung im Windschatten eines geheizten Rotationskörpers. Die erhaltenen Ergebnisse zeigen eine Abweichung gegenüber den experimentell erhaltenen Werten.

In ähnlicher Weise wie Prandtl¹ behandelt W. Tollmien⁷ zusammenfassend die ausgebildete turbulente Strömung. Er zeigt, daß die Prandtlsche Annahme, nach welcher die Geschwindigkeit in der Nähe einer glatten Wand nur von den physikalischen Größen in Wandnähe abhängt, zu einem universalen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz führt. Unter Einführung der dimensionslosen Geschwindigkeit $u^* = \bar{u} \sqrt{\frac{\rho}{\tau_0}}$

und des dimensionslosen Wandabstandes $y^* = \frac{y}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$, wobei τ_0 die Schubspannung an der Wand und y den Wandabstand bedeutet, ergibt sich

$$u^* = 2.5 \ln y^* + 5.5.$$

Dieses Gesetz kann für beliebig große Reynoldssche Zahlen extrapoliert werden. Daraus ergibt sich auch ein bis zu beliebig hohen Reynoldsschen Zahlen gültiges Widerstandsgesetz für das Rohr und die längsangeströmte Platte.

Die turbulente Geschwindigkeitsverteilung im Kreisrohr untersuchte nach dem Prandtlschen Mischungswegansatz R. Gran Olsson.⁸ Aus den Messungen von Nikuradse über die turbulente Strömung in glatten Rohren findet er, daß für große Reynoldssche Zahlen die Verteilung des Mischungsweges l über den Rohrdurchmesser $2r$ durch die Beziehung

$$\frac{l}{r} = 0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{y}{r}\right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{y}{r}\right)^4$$

dargestellt wird. Die mit dieser Mischungswegverteilung berechnete Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich in guter Übereinstimmung mit der experimentell gefundenen.

Hauptsächlich mit dem hydraulischen Widerstand in glatten und rauhen, geraden Kreisrohren und von tangentiell angeströmten ebenen Platten bei ausgebildeter turbulenter Strömung hoher Reynoldsscher Zahlen befaßt sich Th. v. Kármán.⁹ Außerdem wird der Wärmetransport durch die turbulente Nebenbewegung im Kreisrohr und die Verteilung von Sinkstoffen in einem Fluß oder Kanal behandelt. Da die Konzentration einer bestimmten Teilchensorte nach M. P. O'Brien durch die Fallgeschwindigkeit und die turbulente Austauschgröße bestimmt ist, gelingt es, die Konzentration bis auf eine multiplikative Konstante aus der Geschwindigkeitsverteilung zu berechnen, wenn die turbulente Austauschgröße durch die Schubspannung und den mittleren Geschwindigkeitsgradienten ausdrückt.

L. Loitziansky¹⁰ zeigt, daß eine ausgebildete zweidimensionale turbulente Strömung zwischen zwei parallelen Wänden in Schichten eingeteilt werden kann, in denen die mittleren relativen Strömungen einander ähnlich sind. Die Einteilung der Schichten erfolgt nach den Beziehungen

$$l_k \frac{u_k''}{u_k'} = l_i \frac{u_i''}{u_i'} = \dots,$$

wobei $l_k, l_i \dots$ die Schichtdicken und $u_k', u_i' \dots$ bzw. $u_k'', u_i'' \dots$ die ersten bzw. zweiten Ableitungen der jeweiligen Geschwindigkeiten u nach den senkrechten Abständen y von der Wand bedeuten. Diese Beziehungen legte schon Kármán seinen Ähnlichkeitsbetrachtungen zugrunde. Es ergeben sich daher dieselben Grundgleichungen für die ausgebildete turbulente Strömung, wie sie Prandtl und Kármán

hergeleitet hatten. Für den Mischungsweg l in der Nähe der Achse eines Rohres wird die Beziehung

$$l \sim z + \text{const.} \sqrt[2k]{\frac{z}{r}}$$

hergeleitet, in welcher z der Abstand von der Rohrachse, r der Rohrradius und k eine ganze Zahl ist.

Auf Grund der Taylorschen Wirbelaustauschtheorie behandelt S. Goldstein¹¹ den allgemeinen Fall einer turbulenten Strömung, bei der die drei Komponenten der mittleren Geschwindigkeit v und der Schwankungsgeschwindigkeit v' von Null verschieden sind. Der Zusammenhang der Schwankungsgeschwindigkeiten mit der mittleren Bewegung ist durch $\omega' = \text{rot} (\mathfrak{Q} \times \omega)$ gegeben, wobei $\omega' = \text{rot } v'$ und $\omega = \text{rot } v$, während \mathfrak{Q} ein verallgemeinerter Mischungsweg mit den Komponenten L_x, L_y, L_z ist. Mit dem Reynoldsen Ansatz für die turbulente Schubspannung ergeben sich aus diesem Wert für die Schwankungsgeschwindigkeit die Bewegungsgleichungen.

Die Kármánsche Ähnlichkeitshypothese der ausgebildeten turbulenten Strömung in einem Kanal mit parallelen Wänden und in einem Rohr wird ausführlich von S. Goldstein¹² diskutiert. Mit der Kármánschen Mischungsformel $l = \kappa \cdot \frac{du}{dy} / \frac{d^2u}{dy^2}$ für

den Kanal mit parallelen Wänden und $l = \kappa \frac{du}{dr} / \left(\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right)$ für das Kreisrohr, in welcher u die Geschwindigkeitskomponente parallel zur Wand, y den senkrechten Abstand zur Wand im Kanal und r den Abstand von der Achse im Rohr bedeuten, wird die Bewegungsgleichung einerseits für die Prandtlsche Impulsaustausch- und andererseits für die Taylorsche Wirbelaustauschtheorie integriert. Die für den Kanal aus der Impulsaustauschtheorie erhaltene Geschwindigkeitsverteilung ergab sich in besserer Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen, als die aus der Wirbelaustauschtheorie hergeleitete. Für das Kreisrohr ergab die Wirbelaustauschtheorie bessere Übereinstimmung mit den Versuchswerten.

Im Anschluß an die eben angeführte Untersuchung von S. Goldstein untersucht G. J. Taylor¹³ die Geschwindigkeitsverteilung für die ausgebildete turbulente Strömung im Kanal mit parallelen Wänden und für das Kreisrohr nach der Impuls- und Wirbelaustauschtheorie, wobei er für den Mischungsweg im Kanal bzw. Rohr den Ansatz $l = B(b - y)$ bzw. $l = B(R - r)$ macht. Hierin bedeuten: B = universelle Konstante, b = halbe Kanalbreite, R = Rohrradius, y = Wandabstand, r = Abstand von der Rohrachse. Der Vergleich der erhaltenen vier theoretischen Kurven mit den Versuchsergebnissen ergibt für den Kanal gleich gute Übereinstimmung für Impuls- und Wirbelaustauschtheorie, während für das Rohr die Übereinstimmung mit der Wirbelaustauschtheorie etwas besser ist.

Für die ausgebildete turbulente Strömung in einem kreisringförmigen Rohr wurde von V. Mikrjukov¹⁴ gefunden, daß die Geschwindigkeit über den Querschnitt asymmetrisch verteilt ist und der Wert der Schubspannung an der inneren Wand ungefähr den dreifachen Betrag derselben an der Außenwand besitzt. Die mit Hilfe der Prandtl-Kármánschen Theorie der turbulenten Strömung hergeleitete Geschwindigkeitsverteilung ergibt sich in guter Übereinstimmung mit den Meßergebnissen.

Die ausgebildete turbulente Strömung zwischen zwei rotierenden Zylindern, von denen der äußere ruht und der innere umläuft, untersucht G. J. Taylor.¹⁵ Es ergab sich, daß auf 83 % des Zwischenraumes zwischen den beiden Zylindern $U \cdot r = \text{const.}$ ist. U ist die Geschwindigkeit und r der Abstand von der Achse. Die bei erhitztem inneren Zylinder sich einstellende Temperaturverteilung zeigt einen durchgehenden Temperaturabfall nach außen. Nach der Prandtlschen Impulsaustauschtheorie müßte die Temperaturverteilung mit der Verteilung $U \cdot r$ übereinstimmen. Die Taylorsche Wirbelaustauschtheorie ergibt hingegen eine davon verschiedene

Temperaturverteilung. Die Meßergebnisse zeigen für Gebiete in unmittelbarer Wandnähe eine Übereinstimmung mit der Prandtlschen Annahme, dagegen im größeren mittleren Bereich mit der Taylorsche Annahme.

Der Widerstand einer rotierenden ebenen Scheibe in einer unbegrenzten Flüssigkeit bei turbulenter Strömung untersucht S. Goldstein.¹⁶ Unter Einführung des von Prandtl-Kármán abgeleiteten logarithmischen Geschwindigkeitsverteilungsgesetzes

$$u_{\max} - u = 5.75 \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \log \frac{y}{\delta},$$

wobei δ die Grenzschichtdicke ist, ergibt sich das Widerstandsgesetz der rotierenden Scheibe als

$$k_M^{-\frac{1}{2}} = 2.78 \log \left(Re \cdot k_M^{-\frac{1}{2}} \right) + 0.46.$$

In dieser Gleichung bedeutet $k_M = \frac{M}{\rho a^2 \omega^2}$. M ist dabei das Widerstandsmoment, a der Radius, ω die Winkelgeschwindigkeit und $Re = \frac{\omega a^2}{\nu}$ die Reynoldssche Zahl. Für Reynoldssche Zahlen $Re > 10^5$ ist das abgeleitete Widerstandsgesetz in guter Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen.

In einer Reihe von Arbeiten entwickelt G. D. Mattioli¹⁷⁻³³ eine neue Theorie der ausgebildeten turbulenten Strömung. Während Prandtl für den turbulenten Austausch dem Impuls und Taylor der Wirbelgröße (vorticity) die wesentliche Bedeutung für die inneren Druckkräfte der turbulenten Strömung zuschreiben, nimmt Mattioli in seiner Theorie sowohl Impuls und Drehimpuls als bestimmend an, da er die an dem Austausch teilnehmenden Elementarteilchen als endlich ansieht.

Im Gegensatz zum klassischen Kontinuum werden im turbulenten Kontinuum die nicht zusammenhängenden, am turbulenten Mischungsvorgang teilnehmenden Elementarteilchen dynamisch gesondert betrachtet. Während zur Kennzeichnung des klassischen Kontinuums die Impulsdichte ρv allein genügt, muß beim turbulenten Kontinuum die Drehimpulsdichte $\rho l^2 \omega$ hinzugefügt werden. Da man annehmen kann, daß sich die Elementarteilchen aus der in mittlerer Bewegung befindlichen Flüssigkeit ausscheiden, so wird $\omega = \text{rot } v$ dem Wirbel der mittleren Bewegung gleichgesetzt. l ist eine aus Dimensionsgründen eingeführte Länge.

Es findet in jeder durch die turbulente Flüssigkeit gezogenen Fläche ein Austausch beider Größen ρv und $\rho l^2 \omega$ statt und dieser Austausch ist dynamisch einer Verteilung innerer Druckkräfte gleichwertig.

Für die turbulente Strömung im Kreisrohr ergeben sich aus der Mattiolischen Theorie folgende Verhältnisse.³³ Betrachtet man ein Koordinatensystem, dessen x -Achse mit der Rohrachse zusammenfällt, und ist u die Geschwindigkeit parallel zur positiven Richtung der x -Achse, r der Abstand des Flüssigkeitsteilchens von der Rohrmitte, ε die Austauschzahl, so stellt $\rho \varepsilon \frac{du}{dr}$ den in der Zeit- und Flächeneinheit in radialer Richtung übertragenen Impuls dar. Es ist also die Tangentialspannung

$$\tau_{rx} = \rho \varepsilon \frac{du}{dr}. \quad (1)$$

Nachdem der Impulsaustausch den Drehimpuls des Massenelementes nicht ändert, ist der entsprechende Drucktensor symmetrisch anzunehmen; es gilt also $\tau_{rx} = \tau_{xr}$. Setzt man weiter $\tau_{rr} = \tau_{xx} = 0$, so ist der genannte Tensor vollständig bestimmt.

Der Wirbel der mittleren Bewegung ist

$$\omega = \frac{du}{dr}. \quad (2)$$

Aus der Definition der Austauschzahl ε erhält man die Zunahme des Drehimpulses der Volumeneinheit je Zeiteinheit als

$$M = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \varrho \varepsilon \frac{d(l^2 \omega)}{dr} \right]. \quad (3)$$

Nachdem im stationären Zustand die Drehimpulsdichte konstant bleiben muß, so müssen an der Oberfläche jedes Volumelementes ΔV innere Kräfte wirken, deren Drehmoment um den Mittelpunkt von ΔV gleich $-M \cdot \Delta V$ ist. Diese inneren Kräfte bewirken die Zerstreuung der örtlichen Änderung des Drehimpulses. Da die Rotationsachse der Elementarteilchen mit der Wirbelrichtung zusammenfällt, ergeben sich symmetrische Verhältnisse und für die Komponenten des bezüglichen Drucktensors ergibt sich die Annahme

$$\sigma_{xx} = \sigma_{rr} = 0; \quad \sigma_{rx} = -\sigma_{xr} = -\frac{M}{2}.$$

Dieser Tensor ist also antisymmetrisch. Eine weitere Art innerer Spannungen rührt von der Zähigkeit her, für deren Tensor gilt:

$$\nu_{xx} = \nu_{rr} = 0; \quad \nu_{rx} = \nu_{xr} = \varrho \nu \frac{du}{dy},$$

wobei ν die kinematische Zähigkeit ist. Für die Komponenten des gesamten Drucktensors ergeben sich also die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} t_{xx} &= \tau_{xx} + \sigma_{xx} + \nu_{xx} = 0, & t_{rr} &= 0, \\ t_{xr} &= \varrho (\varepsilon + \nu) \frac{du}{dr} - \frac{M}{2}, & t_{rx} &= \varrho (\varepsilon + \nu) \frac{du}{dr} + \frac{M}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Für $\varrho = \text{const.}$ und konstanten Druckgradienten $\frac{dp}{dx}$ drückt die Gleichung

$$\frac{1}{r} \frac{d(r t_{rx})}{dr} = \frac{dp}{dx} = \text{const.} \quad (5)$$

das Gleichgewicht zwischen dem Druckgradienten und den längs der Kreise mit den Radien $r, r + dr$ wirkenden Schubspannungen t_{rx} aus. Sie stellt also für diesen Fall die Bewegungsgleichung dar.

Setzt man für t_{rx} den angegebenen Wert ein, so folgt

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\varrho (\varepsilon + \nu) r \frac{du}{dr} + r \frac{M}{2} \right] = \frac{dp}{dx}. \quad (6)$$

Durch Integration und Einführung des Wertes $\alpha = -\frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dx}$ erhält man

$$-\varrho (\varepsilon + \nu) \frac{du}{dr} - \frac{M}{2} = \varrho \frac{\alpha r}{2}. \quad (7)$$

Es ist dabei zu beachten, daß für $r = 0$ die Schubspannung Null, während sie an der Wand gleich $\tau_0 = \varrho \frac{\alpha R}{2}$ ist. R ist der Halbmesser des Rohres. Für die Verhältnisse an der Wand ist die Reibungsgeschwindigkeit $v^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}} = \sqrt{\frac{\alpha R}{2}}$ maßgebend.

Die Drehmomentdichte M folgt aus der Annahme, daß ein Drehimpuls nur an der Wand entstehen kann, da die am Mischungsvorgang beteiligten Elementarteilchen gegen die Wand mit einer von Null verschiedenen Tangentialgeschwindigkeit stoßen, wodurch sie eine Deformation erleiden, die einer Wirbelerzeugung gleichkommt. Dieser an der Wand erzeugte Drehimpuls muß im Inneren der Flüssigkeit durch das Drehmoment $-M$ zerstreut werden. Für das Rohr wird demnach M der Größe $\frac{d(\varrho l^2 \omega)}{dr}$ verhältnismäßig angenommen. Beim Fehlen von Wänden, also freier Turbulenz, muß $M = 0$ sein.

Es wird also für das Rohr

$$M = \psi \frac{d(\varrho l^2 \omega)}{dr} \quad (8)$$

gesetzt. Setzt man für M den früher angegebenen Wert ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \varrho \varepsilon \frac{d(l^2 \omega)}{dr} \right] = \psi \frac{d(\varrho l^2 \omega)}{dr}, \quad (9)$$

welche für die Mattioli'sche Theorie charakteristisch ist.

Aus Betrachtungen, die sich auf das einleitend angegebene Prandtl'sche Ähnlichkeitsgesetz stützen, wird ψ und l als konstant angenommen, und zwar gelten für sie die Beziehungen

$$\psi = \chi \cdot v^*; \quad l^2 = 2 \beta \frac{v^2}{\chi v^{*2}} \quad (10)$$

χ und ψ stellen zwei universelle Konstante der Reibungsturbulenz dar, und zwar ergibt sich χ zu 0.406, während der Wert von β zwischen 2.46 und 3.5 liegt und hauptsächlich durch den Verlauf der Geschwindigkeitskurve in unmittelbarer Wandnähe beeinflußt wird.

Die Bewegungsgleichung (7) der turbulenten Strömung ergibt sich unter Beachtung von Gl. (8) und (10) als

$$(\varepsilon + \nu) \frac{du}{dr} - \beta \frac{v^2}{v^*} \frac{d^2 u}{dr^2} = -\frac{\alpha r}{2}. \quad (11)$$

Durch Integration von Gl. (9) erhält man

$$\varepsilon r \frac{d^2 u}{dr^2} = \chi v^* \left(r \frac{du}{dr} - u + K \right), \quad (12)$$

in welcher K eine Integrationskonstante bedeutet, die vorläufig nur auf Grund der Erfahrung erschlossen werden kann.

Die Randbedingungen werden gesetzt³⁰

$$\begin{aligned} \text{und} \quad v \frac{du}{dr} &= \alpha \frac{R}{2} = v^{*2} \quad \text{für} \quad r = R \\ u &= \Delta v^* \quad \text{für} \quad r = R, \end{aligned}$$

wobei Δ ein von β abhängiger Wert zukommt. Der ersten Randbedingung liegt die Annahme zugrunde, daß die gesamte Schubspannung an der Wand sich auf die Zähigkeitskomponente zurückführen läßt. Die zweite Bedingung folgt aus der Vorstellung, daß der Austauschvorgang sich in einer so dünnen Schicht an der Wand abspielt, so daß die Geschwindigkeit für $r = R$ auch an der inneren Seite der Wandschicht, an welcher die eigentliche turbulente Bewegung einsetzt, angenommen werden darf. Erfahrungsgemäß ist $\Delta = 8.06$ für $\beta = 2.46$ und $\Delta = 7.7$ für $\beta = 3.5$ anzunehmen.

Die mit den vorstehenden Randbedingungen ermittelten Integrale der Gl. (11) und (12) ergeben die Geschwindigkeitskurve und die Austauschzahl ε . Es ergeben sich Geschwindigkeitsverteilungen, die mit den Meßergebnissen von Nikuradse gut übereinstimmen.

Die Anwendung der Mattioli'schen Turbulenztheorie auf den freien Strahl²⁴ ergibt befriedigende Übereinstimmung der Ergebnisse mit den Messungen von E. Foerthmann.

Mit den Ansätzen von Mattioli behandelt die turbulente Grenzschicht an einer Platte A. Cossiglio.³² Die äußere Strömung wird dabei nicht turbulenzfrei angenommen, sondern sie soll eine konstante turbulente Austauschgröße aufweisen. Ein Vergleich der gefundenen Beziehungen mit Versuchswerten erfolgt nicht.

Neben dieser Mattioli'schen Turbulenztheorie soll die Turbulenztheorie von V. Gavrilenko^{34, 35} nur der Vollständigkeit halber erwähnt werden. Nach derselben sollen bei einer turbulenten Strömung in Rohren oder Kanälen die Wandelemente der benetzten Oberfläche auf Grund eines Fernwirkungsgesetzes die Geschwindigkeits-

verteilung über den Strömungsquerschnitt bestimmen. Der Vergleich der Ergebnisse mit den Untersuchungen von Nikuradse ergab befriedigende Übereinstimmung.

Eine zusammenfassende Übersicht über die Entwicklung der Theorie der ausgebildeten Turbulenz gab Hugh L. Dryden³⁶ und Th. v. Kármán.³⁷

Literatur:

- ¹ L. Prandtl: Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. VDI 1933, 105—114. —
- ² L. Prandtl: Z. angew. Math. Mech. 5 (1925). — ³ J. Nikuradse: Gesetzmäßigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Rohren. VDI-Forsch.-Heft 356 (1932). — ⁴ W. Tollmien: Die Kármánsche Ähnlichkeitshypothese in der Turbulenztheorie und das ebene Windschattenproblem. Ing.-Arch. 4, 1—15 (1933). — ⁵ G. I. Taylor: The Transport of Vorticity and Heat through Fluid in Turbulent Motion. Proc. Roy. Soc., Lond. A 135, 685, 702 (1932). — ⁶ S. Tomotika: Proc. Roy. Soc., Lond. A 165, 53—64 (1938). — ⁷ W. Tollmien: The present state of the turbulence Problem. Appl. Mech. 1, 19—28 (1933). — ⁸ R. Gran Olsson: Die turbulente Geschwindigkeitsverteilung im Kreisrohr nach dem Prandtlschen Mischungswegansatz. Norske Vid. Selsk., Forh. 6, 173—176 (1933). — ⁹ Th. v. Kármán: Some aspects of the turbulence problem. Guggenheim Aeronaut. Labor., California Inst. Techn., Pasadena, Publ. Nr. 42, 58 (1934). — ¹⁰ L. Loitziansky: Über einige Anwendungen der Ähnlichkeitsmethode auf die Theorie der Turbulenz. Appl. Math. a. Mech. 2, 180—206 (1935). — ¹¹ S. Goldstein: A note on the vorticity-transport theory of turbulent motion. Proc. Cambridge philos. Soc. 31, 351—359 (1935). — ¹² S. Goldstein: The similarity theorie of turbulence, and flow between parallel planes and through pipes. Proc. Roy. Soc., Lond. A 159, 437—496 (1937). — ¹³ G. I. Taylor: Flow in pipes ant between parallel planes. Proc. Roy. Soc., Lond. A 159, 496—506 (1937). — ¹⁴ V. Mikrjukov: The turbulent Flow of a Fluid in a straigt pipe of annular cross-section. Techn. Physics USSR 4, 961—977 (1937). — ¹⁵ G. I. Taylor: Distribution of velocity and temperature between concentric rotating cylinders. Proc. Roy. Soc., Lond. A 151, 494—512 (1935). — ¹⁶ S. Goldstein: On the resistance to the rotation of a disc immersed in a fluid. Proc. Cambridge Philos. Soc. 31, 232—241 (1935). — ¹⁷ G. D. Mattioli: Sur la théorie de la turbulence dans les canaux. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 1282—1285 (1933). — ¹⁸ G. D. Mattioli: Teoria della turbolenza. Atti R. Accad. naz. Lincei, Rend. VI, s. 17, 217—223 (1933). — ¹⁹ G. D. Mattioli: Teoria della turbolenza. — Conseguenze analitiche e confronto con l'esperienza. II. Atti R. Accad. naz. Lincei, Rend. VI, s. 17, 293—299 (1933). — ²⁰ G. D. Mattioli: Sur les conditions à la paroi pour l'équation de la turbulence dans les canaux. C. R. Acad. Sci., Paris 196, 1866—1868 (1933). — ²¹ G. D. Mattioli: Ricerche sulla meccanica dei moti fluidi turbolenti. Rend. Seminar. mat. Univ. Padova 4, 67—91 (1933). — ²² G. D. Mattioli: Sopra una condizione alla parete per l'equazione della turbolenza nei tubi. Atti R. Accad. naz. Lincei, Rend. VI, s. 17, 932—934 (1933). — ²³ G. D. Mattioli: Assetto definitivo della teoria dinamica della turbolenza. Atti R. Accad. naz. Lincei, Rend. VI, s. 19, 572—577 (1934). — ²⁴ C. Ferrari: Sulla teoria della turbolenza. Atti R. Accad. naz. Lincei, Rend. VI, s. 20, 100—104 (1934). — ²⁵ G. D. Mattioli: Dissipazione vorticiosa nei regimi turbolenti. Atti R. Accad. naz. Lincei, Rend. VI, s. 21, 87—92 (1935). — ²⁶ G. D. Mattioli: Sopra l'influenza della viscosità del fluido nei regimi turbolenti. Atti R. Accad. Sci. Torino 70, 220—239 (1935). — ²⁷ G. D. Mattioli: Getti piani turbolenti. Atti R. Ist. Veneto Sci., Letteri Arti, Parte II. (Sci. mat. natur.) 94, 607—628 (1935). — ²⁸ G. D. Mattioli: Sforzi interni nei mezzi turbolenti ed equazione generali della turbolenza. Atti R. Accad. naz. Lincei, Rend. VI, s. 22, 49—54 (1935). — ²⁹ G. D. Mattioli: Seconda forma delle equazione della turbolenza nell'ipotesi di una direzione di trasporto. Atti R. Accad. naz. Lincei, Rend. VI, s. 23, 49—54 (1936). — ³⁰ G. D. Mattioli: Equazione energetica della turbolenza e condizioni d'integrazione delle equazione indefinite. Atti R. Accad. naz. Lincei, Rend. VI, s. 23, 55—61 (1936). — ³¹ G. D. Mattioli: Teoria dinamica dei regimi fluidi turbolenti, vol. XI, 323 pag. Padova: Antonio Milani. 1937. — ³² A. Consiglio: Deflusso turbolento sulla lastra piana indefinita di una corrente agitata. Atti R. Accad. Goenia Catania VI, s. 2, mem. 2, 1—15 (1937). — ³³ G. D. Mattioli: Theorie der Wärmeübertragung in glatten und rauhen Rohren. Forschg. Ing.-Wes. 11, 149—158 (1940). — ³⁴ V. Gavrilenko: Über die Verteilung der gemittelten Geschwindigkeiten in turbulenten gleichförmigen Flüssigkeitsströmungen. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 2, 371—376 (1936). — ³⁵ V. Gavrilenko: Comparison of experimental an theoretical curves showing distribution of

velocities in turbulent uniform flow through pipes. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 15, 441—443 (1937). — ³⁶ Hugh L. Dryden: Recent developments of the theory of turbulence. J. appl. Mech. 4, 105—108 (1937). — ³⁷ Th. v. Kármán: Turbulence. J. Roy. Aeronaut. Soc. 41, 1109 bis 1143 (1937).

(Eingegangen am 5. September 1946.)

Buchbesprechungen.

Einführung in die Festigkeitslehre für Studierende des Bauwesens. Von F. Chmelka und E. Melan. Mit 216 Textabb. VII, 304 S. Wien: Springer-Verlag. 1946. S 28.—

Die beiden Verfasser stellen sich in der vorliegenden „Einführung in die Festigkeitslehre“ die Aufgabe, einen leichtfaßlichen Behelf den Studierenden an die Hand zu geben, der seine Entstehung im wesentlichen den Vorlesungen verdankt, die an der Hochschule in Wien für die Hörer der Fakultät für Architektur gehalten werden. Die Darstellung ist, dem Zwecke des Buches angepaßt, möglichst klar und einfach, ohne auf wissenschaftliche Exaktheit zu verzichten; sie beschränkt sich dementsprechend auf die technische Festigkeitslehre. An Vorkenntnissen wird möglichst wenig vorausgesetzt; neben den Kenntnissen, die der Absolvent einer Mittelschule erworben hat, genügen jene, wie sie etwa die von den gleichen Verfassern herrührende „Einführung in die Statik“ vermittelt. Auf die Erläuterung durch praktische Beispiele, die zumeist Aufgaben des Bauwesens behandeln, ist Wert gelegt.

Das vorliegende Buch ist nicht nur geeignet, für Studierende Technischer Hochschulen einen geeigneten Behelf für das Studium zu bilden, sondern kann auch mit Nutzen zum Selbststudium verwendet werden.

K. Wolf, Wien.

W. D. Treadwell, Tabellen zur qualitativen Analyse. 17. unver. Aufl. von F. P. Treadwell † und V. Meyer †. 92 S. Wien, Franz Deuticke. 1946. Preis S 9.—

Es spricht für die gute Aufnahme, welche die vorliegenden „Tabellen“ an vielen Stellen gefunden haben, daß nun schon die 17., allerdings unveränderte Auflage — 1942 erschien die 16. Auflage — erforderlich ist. Schon dies allein gibt Zeugnis von der Brauchbarkeit dieser Tabellen.

Sie enthalten eine sehr übersichtliche, kurzgefaßte Zusammenstellung der wichtigsten Reaktionen der Metalle und Säuren auf nassem Wege, sowie die der Metalle auf trockenem Wege; ausführlicher und sehr genau ist die tabellarische Zusammenstellung über den üblichen Analysengang, wobei eingehend neben den analytischen Nachweisen auch die makroskopische und mikroskopische Prüfung einer zu untersuchenden Substanz beschrieben wird. Darüber hinaus werden diese rein analytischen Darstellungen durch Tabellen über Erfassungsgrenze, Löslichkeitsverhältnisse, Dissoziationskonstanten und Angaben über Spektrallinien, soweit sie für eine qualitative Identifizierung mit einfachen, spektralanalytischen Hilfsmitteln (Handspektroskop) durchführbar sind, wertvoll ergänzt. Ein Anhang befaßt sich mit den Reaktionen seltener Elemente, wie seltene Erden, Platinmetalle, und auch von Elementen, wie Titan, Wolfram und Molybdän. Allerdings können die letztgenannten Elemente heute nicht mehr zu den seltenen Stoffen gerechnet werden, denn z. B. Titan ist fast in jedem Gestein nachweisbar, während das tatsächlich seltene Uran in diesen Tabellen ausführlich im Rahmen des allgemeinen Analysenganges besprochen wird.

Abgesehen von dieser, heute nicht mehr ganz zutreffenden Einteilung bzw. Anordnung, ist die Auswahl der Reaktionen und ihre genaue Beschreibung vorzüglich. Es muß aber auch vermerkt werden, daß der Benutzung von Tabellen im analytischen Unterricht, für den sie in erster Linie geschrieben sind, schwere Bedenken entgegenstehen, wie auch vom Herausgeber im Vorwort betont wird, ebenso aber — und auch hierin ist ihm beizupflichten —, daß sie neben einer anreichenden theoretischen Unterweisung im Chemismus der analytischen Reaktionen, die natürlich im Tabellenwerk fehlt, wertvolle Dienste leisten können.

Diese Tabellen sind als Repetitorium wie auch als Gedächtnishilfe allen jenen bestens empfohlen, die sich mit qualitativer Analyse zu befassen haben.

M. Nießner, Wien.

Seit Juli 1946 erscheint:

Österreichische Bauzeitschrift

Organ der Fachgruppen für Bauwesen des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines sowie des Österreichischen Betonvereines, des Österreichischen Wasserwirtschaftsverbandes und der Städtischen Prüf- und Versuchsanstalt für Bauwesen Wien

Beirat: K. Bittner · Th. Dokulil · A. Grzywiński · E. Melan
F. Pongratz · W. Sandecki · J. Schmidt · R. Tillmann · O. Vas

Schriftleitung: E. Czitary, Wien

Preis halbjährlich S 24.—, zuzüglich S —.60 für Versandgebühren

Für Mitglieder des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines S 21.—, zuzüglich S —.60 für Versandgebühren. Einzelhefte S 5.—. Für Lieferungen ins Ausland gelten Auslandspreise

Jährlich erscheinen 24 Hefte

Inhalt der bisher erschienenen Hefte:

Heft 1/2

(Juli/August 1946)

Originalarbeiten:

Pongratz F.: Zum Geleit.

Herzka L.: Das wirkliche elastische Gewicht streckenbelasteter Vollwandtragwerke.

Stini J.: Baugeologisches vom Loibl-Tunnel.

Findeis R.: Zeitbedingte Bemerkungen zu einigen Wiener Eisenbahn-Verkehrsfragen.

Wycital H.: Über die Berechnung zweiteiliger Gliederstäbe aus Holz.

Czitary E.: Günstige Neigung eingleisiger Gebirgsbahnen.

Personalnachrichten.

Monatsnachrichten des Österreichischen Betonvereines, VI. Jahrgang, Nr. 1:

Valente D.: Vorschlag für die einheitliche Anfertigung der Pläne und Berechnungen im Stahlbetonbau.

Rundschau.

Wasserwirtschaft und Technik, 31. Jahrgang, Nr. 1:

Vas O.: Über das Unterwasserkraftwerk.

Heft 3/4

(September/Oktobre 1946)

Originalarbeiten:

Hennigs E.: Zum Neubau der Seebachbrücke bei Mühldorf (Tauernbahn).

Beer H.: Eine Betrachtung zum heutigen Stand der Theorie und Gestaltung von Hängebrücken.

Pecht A.: Zeitgemäße Kaminfragen.

Litschauer J.: Vereinfachte Ausgleichung von Nivellementnetzen.

Personalnachrichten.

Monatsnachrichten des Österreichischen Betonvereines, VI. Jahrgang, Nr. 2:

Heim R.: Stahlbeton bei der Wiederherstellung von kriegsbeschädigten Wohn- und Geschäftshäusern.

Rakosnik O.: Zeitgemäße Betrachtungen über Ziegel- und Betonmauerwerk.

Wasserwirtschaft und Technik, 31. Jahrgang, Nr. 2:

Hartig E.: Wasserwirtschaft und Wasserrecht.

Rundschau.

S P R I N G E R - V E R L A G I N W I E N

Seit Juli 1946 erscheint:

Maschinenbau und Wärmewirtschaft

Organ der Fachgruppe Maschinenbau des Österreichischen Ingenieur- und Architektenvereines

Fachbeirat: J. Eckert · E. Feifel · F. List · L. Kirste · H. Mache · L. Richter

Schriftleitung: C. Kämmerer, Wien

Preis halbjährlich S 24.—, zuzüglich S —.60 für Versandgebühren

Für Mitglieder des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereines S 21.—, zuzüglich S —.60 für Versandgebühren. Einzelhefte S 5.—. Für Lieferungen ins Ausland gelten Auslandspreise

Jährlich erscheinen 24 Hefte

Inhalt der bisher erschienenen Hefte:

Heft 1/2

(Juli/August 1946)

Originalarbeiten:

Eckert J.: Zur Berechnung von Ein- und Mehrscheibenbremsen.

Wolf K.: Die Schmierung von Dampfturbinen.

Magyar F.: Michell-Lager mit Drossel.

Kämmerer C.: Über eine Sonderform der Massendruckparabel.

Richter L.: Einteilung der Wärmemotoren.

Ledinegg M. und J. Kugler: Zur Berechnung des Wasserumlaufes in Kühlschirmen.

Dolch P.: Ablagerung von flüchtigen Aschebestandteilen im Motor bei Fahrgasbetrieb.

Feifel E.: Zyklonentstaubung.

Melan H.: Vorschläge zur Erzeugung von Heißluft in Stahl- und Hüttenwerken.

Heft 3/4

(September/Oktober 1946)

Originalarbeiten:

Billich J.: Drehscheibenantrieb.

Holba J. J.: Bestimmung der Zulauf-Rohrlichtweite bei Umwälzpumpen für Zwangumlaufkessel.

Eisler B.: Über den Kraftverlauf beim zylindrischen Tiefziehen und die Auswahl der Tiefziehbleche.

Musyl R.: Das K-Profil eine zyklische Kurve.

Trey F. und E. Schulten: Hartlöten mit Zinklot.

Müller K. J.: Überladung von Otto-Fahrzeugmotoren.

Philippovich A. v.: Über die Klopfestigkeit von Kraftstoffgemischen.

Reisch H. und A. Kooy: Elektrische Speicheröfen für Raumheizung.

Persönliches: Zum Gedenken an Prof. Franz List.

Rundschau.

S P R I N G E R - V E R L A G I N W I E N

